

Stochastik

Formelsammlung und Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Binomialverteilung und Normalverteilung

Abi – Baden-Württemberg

Teil I – Grundlagen

0 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Bei einem Laplace-Experiment sind alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ergibt sich dann als:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$$

Merke: Ein Laplace-Experiment liegt vor, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind (z. B. fairer Würfel, faire Münze).

1 Baumdiagramm

Das Baumdiagramm ist ein grafisches Hilfsmittel zur Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimente. An den Verzweigungen werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse notiert.

1.1 Pfadmultiplikation

Die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses entlang eines Pfades ergibt sich durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades werden miteinander multipliziert.

1.2 Pfadaddition

Besteht ein Ereignis aus mehreren Pfaden, werden deren Wahrscheinlichkeiten addiert:

$$P(E) = P(\text{Pfad}_1) + P(\text{Pfad}_2) + \dots + P(\text{Pfad}_n)$$

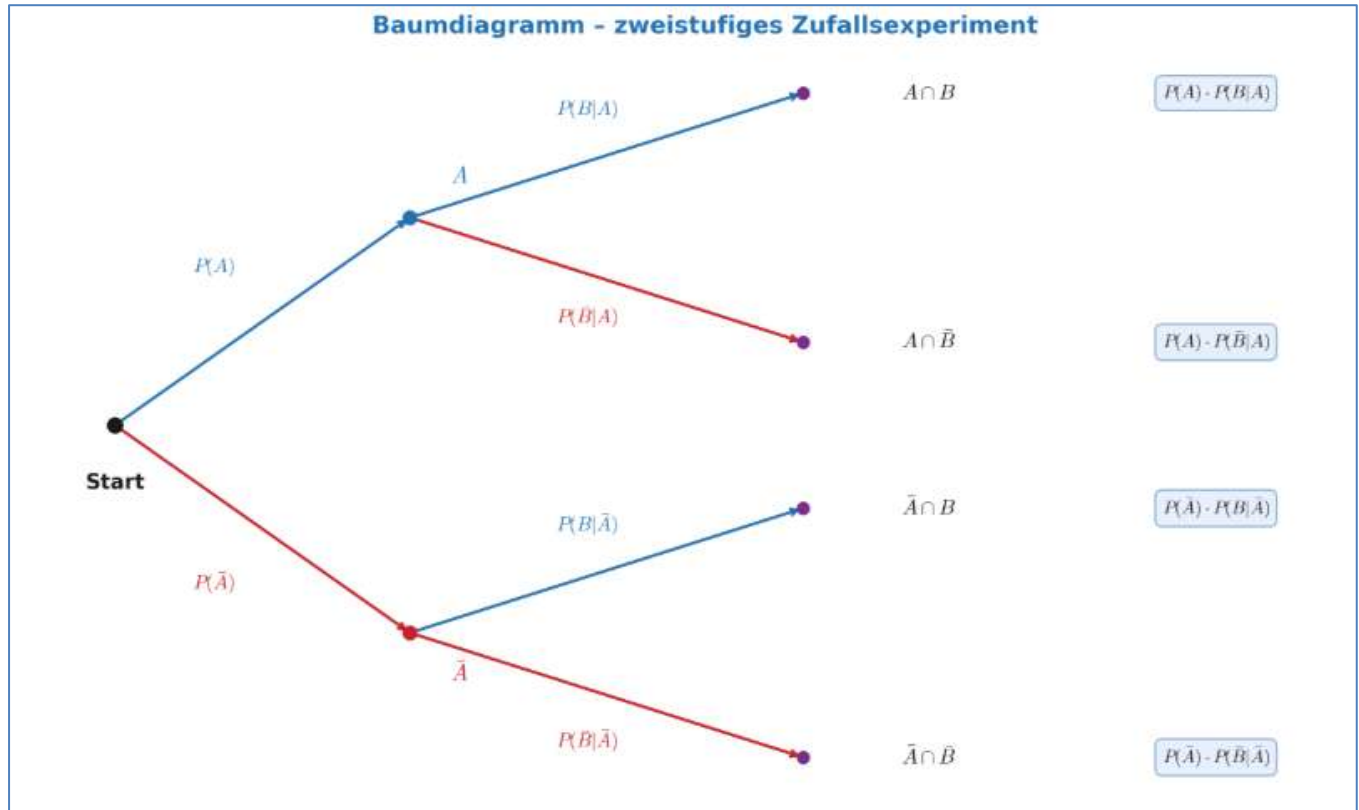


Abb. 1: Baumdiagramm – zweistufiges Zufallsexperiment

1.3 Mit / ohne Zurücklegen

Bei Zufallsexperimenten unterscheidet man, ob gezogene Elemente zurückgelegt werden oder nicht:

Mit Zurücklegen:	P bleibt in jeder Stufe gleich
Ohne Zurücklegen:	P ändert sich (Grundgesamtheit verkleinert sich)
Beispiel:	Ohne Zurücklegen: $P(2. \text{ Kugel rot}) = \frac{r-1}{n-1}$

1.4 Kombinatorik (mit/ohne Beachtung der Reihenfolge)

Die Anzahl möglicher Ergebnisse hängt davon ab, ob die Reihenfolge eine Rolle spielt:

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Reihenfolge wichtig (Variationen)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Reihenfolge egal (Kombinationen)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

n = Anzahl der Elemente, k = Anzahl der Ziehungen.

Sonderfall Permutation ($k = n$): Werden alle n Elemente angeordnet, ergibt sich $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

Sonderfall Permutation mit Wiederholung: Werden n Objekte angeordnet, von denen jeweils $k_1, k_2, \dots, k_m$ identisch sind, gibt es $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$ Anordnungen (mit $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$).

1.5 Gegenereignis

Das Gegenereignis umfasst alle Ergebnisse, die nicht zu A gehören:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

✓ **Tipp:** Besonders nützlich bei mindestens-einmal-Aufgaben: $P(\text{mindestens } 1) = 1 - P(\text{keinmal})$

2 Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswert und Standardabweichung sind zentrale Kenngrößen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

2.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert gibt den durchschnittlich zu erwartenden Wert eines Zufallsexperiments an:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

2.2 Varianz

Die Varianz misst die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

2.3 Standardabweichung

Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz und gibt die Streuung in der Originaleinheit an:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Teil II – Bedingte Wahrscheinlichkeit

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich ein Ereignis A ist, wenn bekannt ist, dass Ereignis B bereits eingetreten ist:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3.1 Satz von Bayes

Der Satz von Bayes ermöglicht es, bedingte Wahrscheinlichkeiten umzukehren:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

3.2 Totale Wahrscheinlichkeit

Die totale Wahrscheinlichkeit berechnet $P(B)$ über alle möglichen Bedingungen:

$$P(B) = P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

! Merke: Die totale Wahrscheinlichkeit wird häufig als Zwischenschritt beim Satz von Bayes benötigt, um den Nenner $P(B)$ zu berechnen.

4 Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn das Eintreten des einen Ereignisses keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des anderen hat:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Gleichbedeutend: $P(A | B) = P(A)$ und $P(B | A) = P(B)$

5 Vierfeldertafel

Die Vierfeldertafel stellt die gemeinsame Verteilung zweier Ereignisse übersichtlich dar:

	B	nicht B	Summe
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
nicht A	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$

Summe	P(B)	P($\bar{B}$)	1
-------	------	----------------	---

	B	$\bar{B}$	Σ
A	P(A ∩ B)	P(A ∩ $\bar{B}$)	P(A)
$\bar{A}$	P($\bar{A}$ ∩ B)	P($\bar{A}$ ∩ $\bar{B}$)	P($\bar{A}$)
Σ	P(B)	P($\bar{B}$)	1

Abb. 2: Vierfeldertafel – schematische Darstellung

Teil III – Binomialverteilung

6 Bernoulliexperiment und Binomialverteilung

Ein Bernoulliexperiment ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ergebnissen: Treffer (Erfolg) mit Wahrscheinlichkeit p und Niete (Misserfolg) mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$.

6.1 Bernoulliformel (Binomialverteilung)

Die Wahrscheinlichkeit, bei n unabhängigen Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

mit dem Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

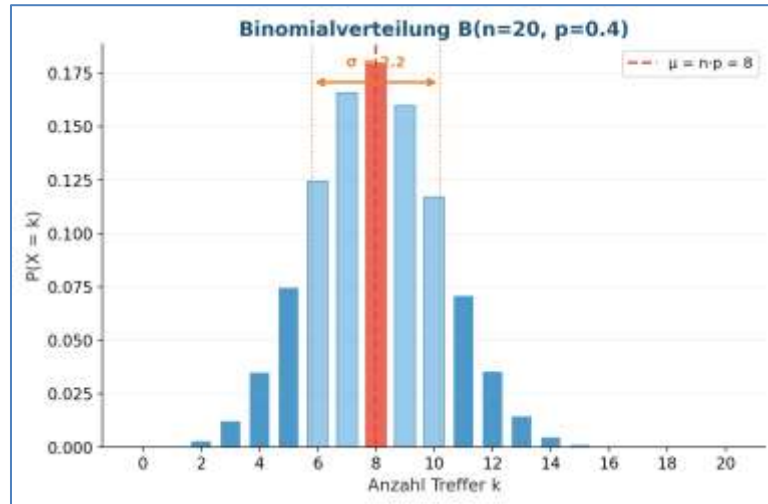


Abb. 3: Binomialverteilung $B(20; 0,4)$ mit Erwartungswert und Standardabweichung

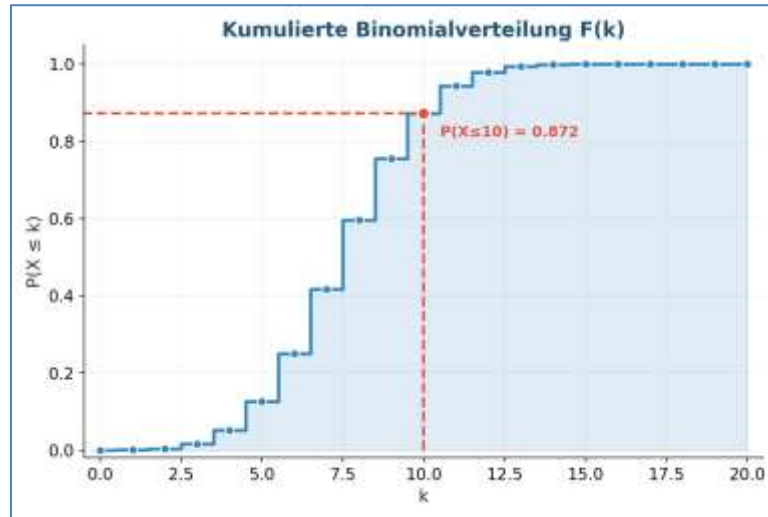
6.2 Kumulierte Binomialverteilung

Die kumulierte Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, höchstens k Treffer zu erzielen:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Wichtige Umrechnungen:

$P(X \geq k)$	$1 - P(X \leq k - 1)$
$P(X > k)$	$1 - P(X \leq k)$
$P(X < k)$	$P(X \leq k - 1)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$

Abb. 4: Kumulierte Binomialverteilung $F(k)$

6.3 Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung

Erwartungswert: $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

✓ **Tipp:** Der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ gibt an, mit wie vielen Treffern man im Durchschnitt rechnen kann. Die Standardabweichung σ beschreibt die typische Abweichung vom Erwartungswert.

Teil IV – Normalverteilung

7 Normalverteilung

Die Normalverteilung (Gauß-Verteilung) ist die wichtigste stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie wird durch Erwartungswert μ und Standardabweichung σ vollständig beschrieben.

7.1 Gaußsche Glockenkurve

Die Dichtefunktion der Normalverteilung lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

7.2 Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung hat $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Jede Normalverteilung kann durch z-Transformation standardisiert werden:

$$\text{z-Transformation: } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\text{Dichtefunktion: } \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Verteilungsfunktion: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ (aus Tabelle ablesbar)

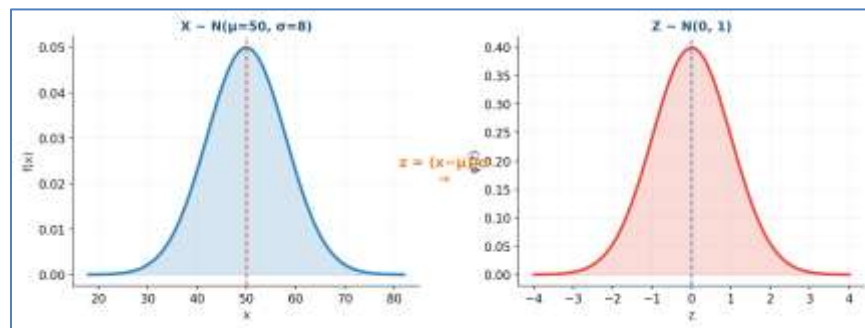


Abb. 5: z-Transformation – von $X \sim N(\mu, \sigma)$ zu $Z \sim N(0, 1)$

7.3 Wahrscheinlichkeiten berechnen

Mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung:

$$P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

7.4 Sigma-Regeln

Für normalverteilte Zufallsgrößen gilt näherungsweise:

Intervall	Wahrscheinlichkeit
$\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma$	$\approx 68,3 \%$

$\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$	$\approx 95,4 \%$
$\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$	$\approx 99,7 \%$

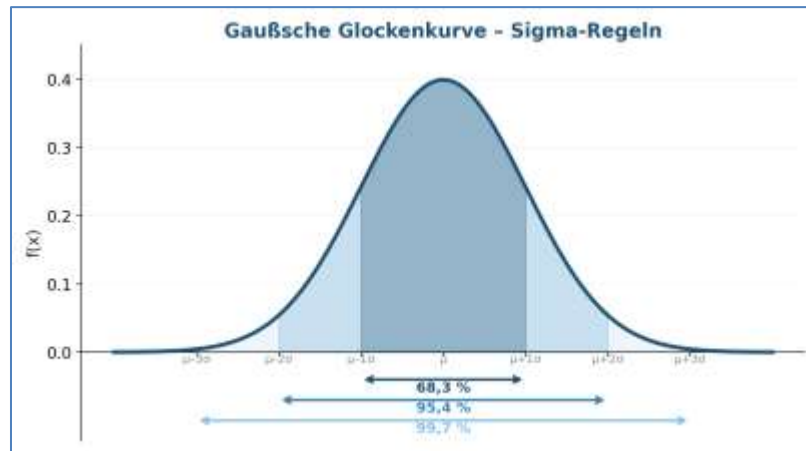


Abb. 6: Gaußsche Glockenkurve mit Sigma-Regeln

7.5 Normalapproximation der Binomialverteilung

Für große n kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung angenähert werden (Faustregel: $\sigma > 3$):

$$X \sim B(n, p) \approx N(\mu = n \cdot p, \quad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p))$$

Mit Stetigkeitskorrektur:

$$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sigma}\right)$$

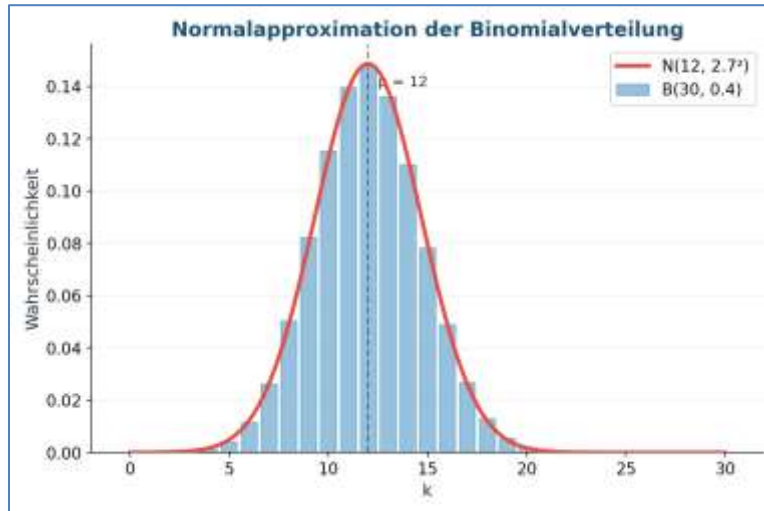


Abb. 7: Normalapproximation der Binomialverteilung

Merke: Die Stetigkeitskorrektur ($\pm 0,5$) verbessert die Approximation, da die diskrete Binomialverteilung durch eine stetige Normalverteilung angenähert wird.

Teil V – Hypothesentest

8 Hypothesentest (Signifikanztest)

Ein Hypothesentest überprüft anhand einer Stichprobe, ob eine Vermutung (Hypothese) über einen unbekannten Parameter der Grundgesamtheit beibehalten oder verworfen wird.

8.1 Grundbegriffe

Nullhypothese H_0	Die Annahme, die überprüft wird (z. B. $p = p_0$ oder $p \geq p_0$)
Alternativhypothese H_1	Das Gegenteil der Nullhypothese (z. B. $p \neq p_0$ oder $p < p_0$)
Signifikanzniveau α	Maximale Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (üblich: $\alpha = 0,05$ oder $\alpha = 0,01$)
Fehler 1. Art	H_0 wird verworfen, obwohl H_0 wahr ist (Wahrscheinlichkeit $\leq \alpha$)
Fehler 2. Art	H_0 wird beibehalten, obwohl H_1 wahr ist
Ablehnungsbereich	Wertebereich, bei dem H_0 verworfen wird

8.2 Vorgehen beim Hypothesentest

1. Hypothesen aufstellen (H_0 und H_1 formulieren)
2. Signifikanzniveau α festlegen
3. Testgröße und Verteilung bestimmen (meist Binomialverteilung)
4. Ablehnungsbereich bestimmen
5. Stichprobe durchführen und Entscheidung treffen

8.3 Linksseitiger Test

Hypothesen: $H_0: p \geq p_0$ gegen $H_1: p < p_0$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0, 1, \dots, k\}$ mit $P(X \leq k) \leq \alpha$

8.4 Rechtsseitiger Test

Hypothesen: $H_0: p \leq p_0$ gegen $H_1: p > p_0$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{k, \dots, n\}$ mit $P(X \geq k) \leq \alpha$

! Merke: Bei einem linksseitigen Test vermutet man, dass p kleiner ist als behauptet. Bei einem rechtsseitigen Test vermutet man, dass p größer ist.

Formelübersicht

Wichtige Formeln auf einen Blick

Laplace:	$P(A) = \frac{ A }{ \Omega }$
Pfadmultiplikation:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$
Gegenereignis:	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Erwartungswert:	$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$
Varianz:	$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$
Bedingte W.keit:	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Satz von Bayes:	$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$
Unabhängigkeit:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Bernoulli-formel:	$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
μ (Binomial):	$n \cdot p$
σ (Binomial):	$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
z-Transformation:	$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$