Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Analysis

Differenzialrechnung

Ableitungen, Kurvendiskussion und Anwendungen

1 Ableitungsregeln

Die Ableitung f′(x) einer Funktion f(x) gibt die Steigung des Graphen an jeder Stelle x an. Sie ist das zentrale Werkzeug der Differenzialrechnung.

1.1 Potenzregel

Regel:	$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Beispiele:

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$
$$f(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4$$
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

1.2 Faktorregel

Regel:	$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

1.3 Summenregel

Regel:	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

1.4 Produktregel

Regel:	$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

1.5 Kettenregel

Regel:	$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Beispiel mit Kettenregel:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$$
$$f(x) = \sin(3x) \;\Rightarrow\; f'(x) = 3 \cdot \cos(3x)$$

1.6 Wichtige Standardableitungen

f(x)	f′(x)
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

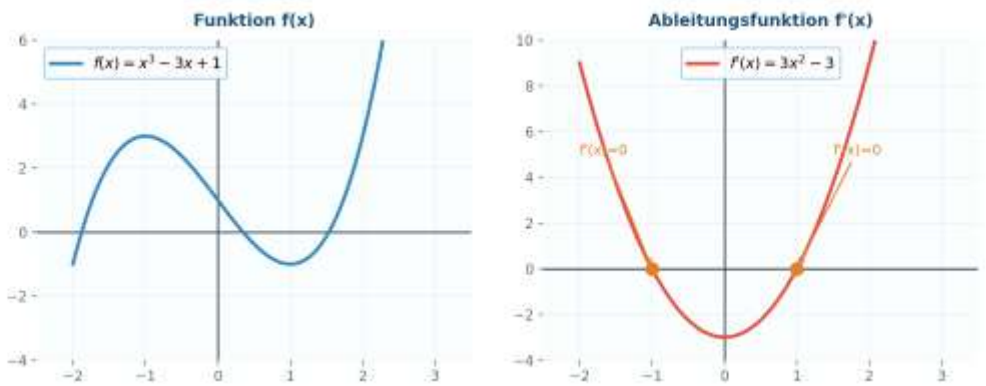


Abb. 1: Funktion f(x) = x³ – 3x + 1 und ihre Ableitung f′(x) = 3x² – 3

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

2 Tangente und Normale

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ ist die Gerade, die den Graphen in P berührt. Die Normale steht senkrecht auf der Tangente.

Tangentengleichung:	$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Normalengleichung:	$n(x) = -1/f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

ℹ Merke:
Die Steigung der Tangente ist $m_t = f'(x_0)$. Die Steigung der Normalen ist $m_n = -1/f'(x_0)$.
Tangente und Normale stehen senkrecht aufeinander: $m_t \cdot m_n = -1$.

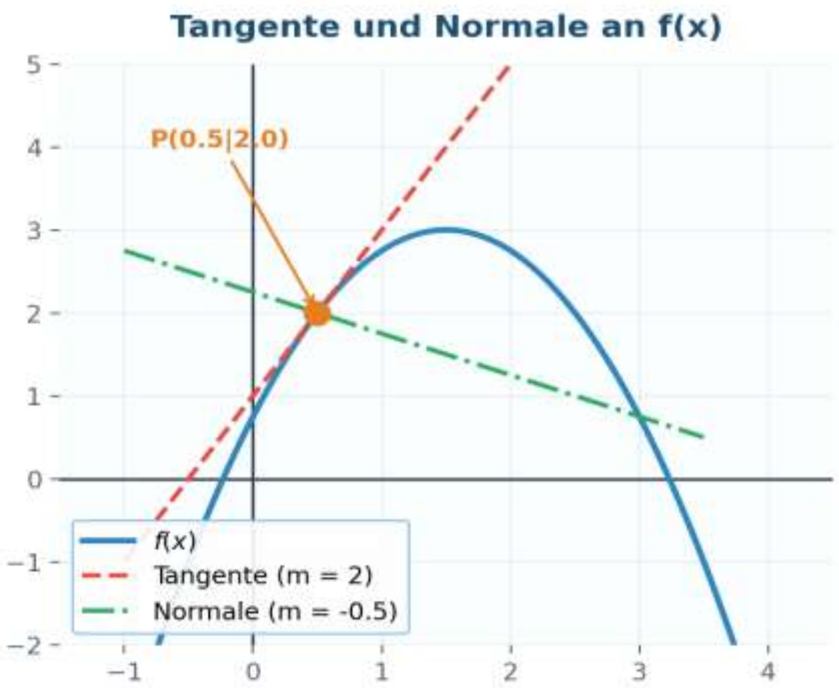


Abb. 2: Tangente und Normale an f(x) im Punkt P

3 Monotonie

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Das Monotonieverhalten einer Funktion beschreibt, in welchen Intervallen der Graph steigt oder fällt.

Monoton steigend:	$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ steigt}$

Monoton fallend:	$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ fällt}$

Vorgehensweise:

- Ableitung f′(x) bestimmen.
- Nullstellen von f′(x) berechnen.
- Vorzeichen von f′(x) in den Intervallen zwischen den Nullstellen prüfen.

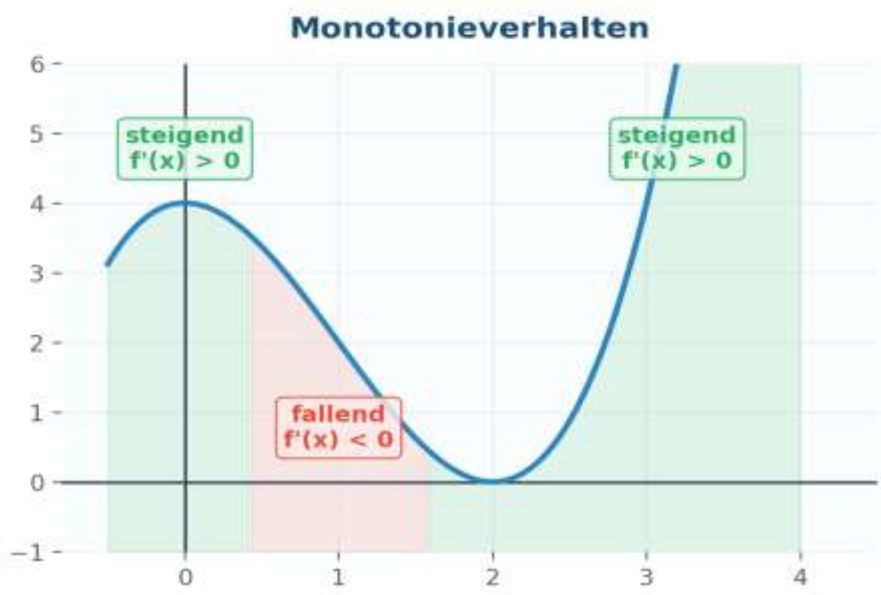


Abb. 3: Monotonieverhalten – steigend (grün) und fallend (rot)

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

4 Krümmung

Die zweite Ableitung f″(x) gibt Auskunft über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Linkskrümmung (konvex):	$f''(x) > 0 \;\Rightarrow\;$ Graph ist nach oben geöffnet

Rechtskrümmung (konkav):	$f''(x) < 0 \;\Rightarrow\;$ Graph ist nach unten geöffnet

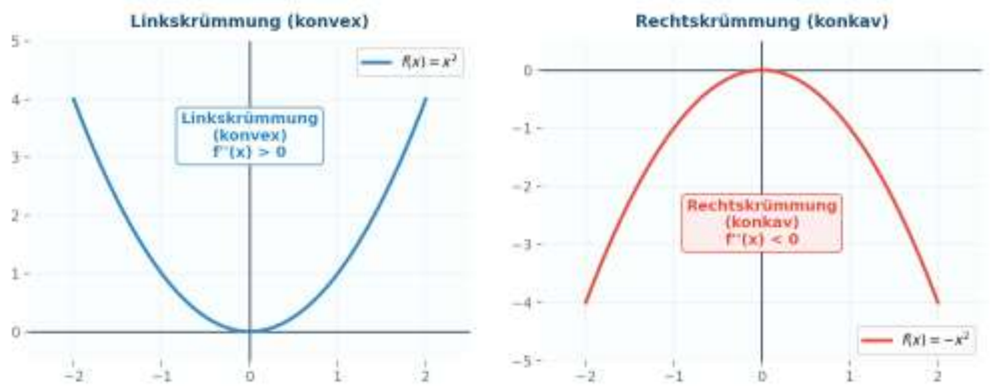


Abb. 4: Linkskrümmung (konvex, f″ > 0) und Rechtskrümmung (konkav, f″ < 0)

5 Hoch- und Tiefpunkte

Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte) sind Stellen, an denen die Funktion lokale Maxima oder Minima annimmt.

5.1 Notwendige Bedingung

Notwendig:	$f'(x_0) = 0$

5.2 Hinreichende Bedingung (VZW-Kriterium)

- **Hochpunkt:** f′(x) wechselt von + nach – (oder: $f''(x_0) < 0$)
- **Tiefpunkt:** f′(x) wechselt von – nach + (oder: $f''(x_0) > 0$)

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = -1, \; x_2 = 1$
$f''(x) = 6x$
$f''(-1) = -6 < 0 \;\; \Rightarrow \;\; \text{Hochpunkt } H(-1 \mid 2)$
$f''(1) = 6 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \text{Tiefpunkt } T(1 \mid -2)$

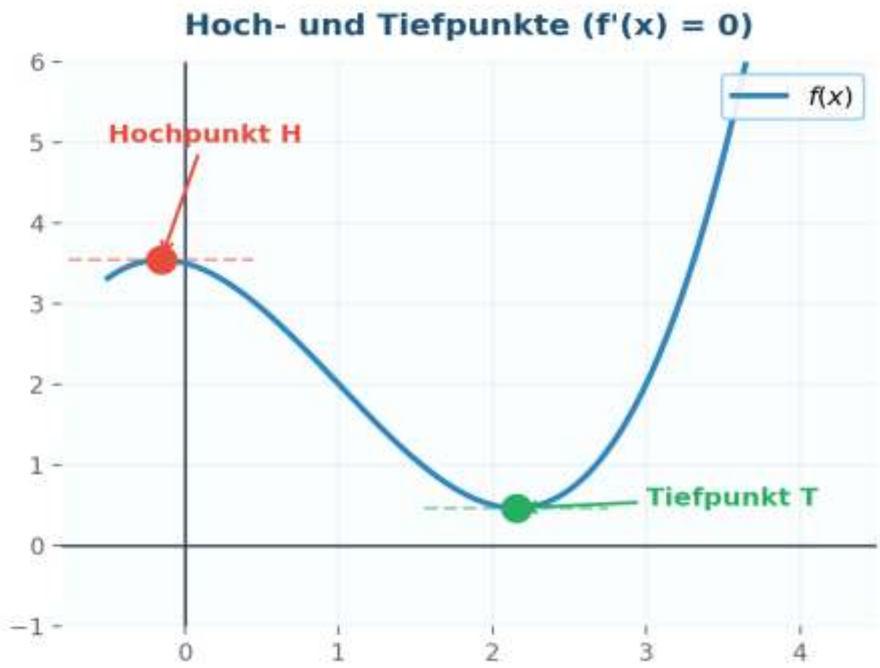


Abb. 5: Hochpunkt H und Tiefpunkt T mit waagerechten Tangenten

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

6 Wendepunkte

Ein Wendepunkt ist eine Stelle, an der der Graph sein Krümmungsverhalten ändert (von Links- zu Rechtskrümmung oder umgekehrt).

Notwendige Bedingung:	$f''(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung:	$f'''(x_0) \neq 0$ (oder VZW von f'')

Am Wendepunkt hat der Graph die stärkste Steigung (oder stärkstes Gefälle). Die Tangente im Wendepunkt heißt Wendetangente.

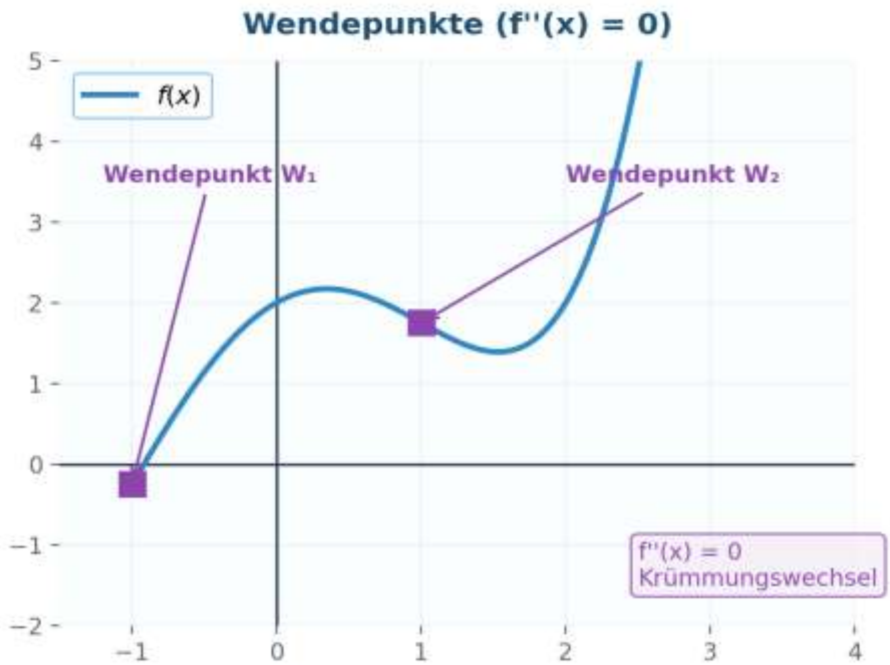


Abb. 6: Wendepunkte W_1 und W_2 – Krümmungswechsel

7 Sattelpunkte (Terrassenpunkte)

Ein Sattelpunkt ist ein spezieller Wendepunkt, bei dem zusätzlich die erste Ableitung null ist. Es liegt also kein Extremum vor, obwohl $f'(x_0) = 0$.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Bedingungen:	$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0$

Beispiel: $f(x) = x^3$ hat bei $x = 0$ einen Sattelpunkt: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$.

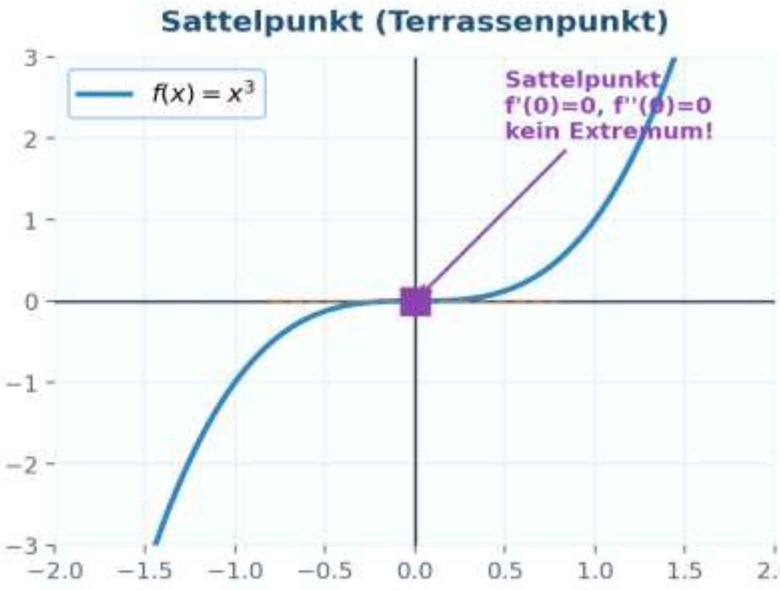


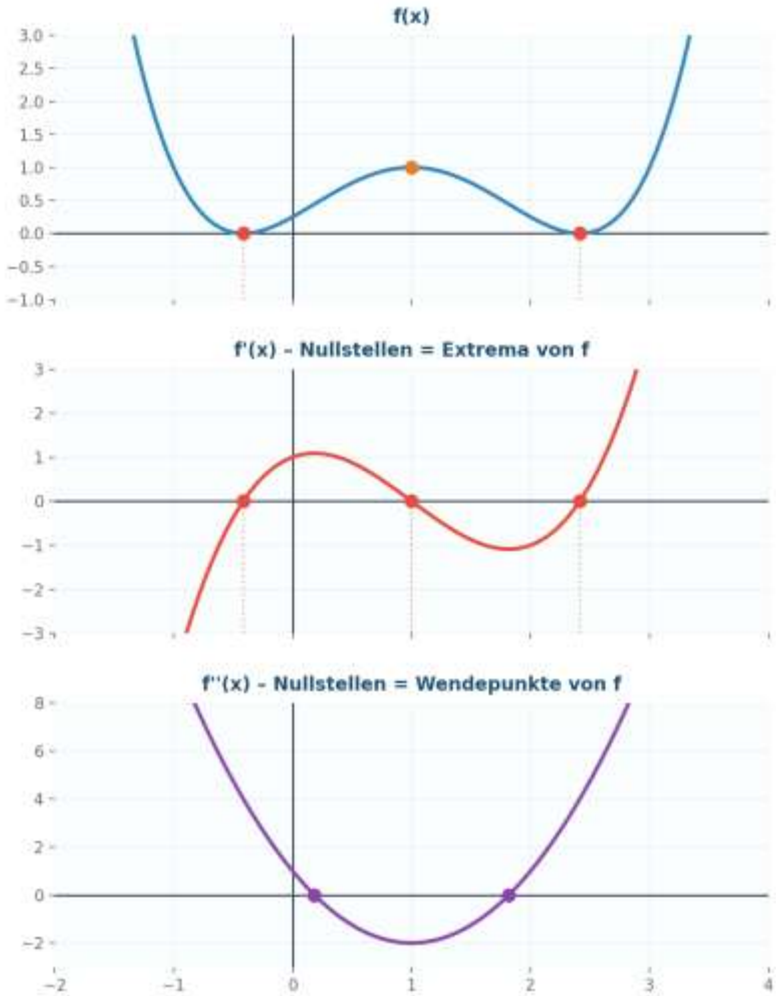
Abb. 7: Sattelpunkt bei f(x) = x³ – waagerechte Tangente, aber kein Extremum

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

8 Graphisches Ableiten

Beim graphischen Ableiten wird der Graph der Ableitungsfunktion aus dem Graphen der Originalfunktion gewonnen, ohne zu rechnen. Dabei gelten folgende Zusammenhänge:

Graph von f	Graph von f′
f steigt	f′(x) > 0 (oberhalb der x-Achse)
f fällt	f′(x) < 0 (unterhalb der x-Achse)
f hat Hochpunkt	f′ hat Nullstelle mit VZW + → –
f hat Tiefpunkt	f′ hat Nullstelle mit VZW – → +
f hat Wendepunkt	f′ hat Extremum
f hat Sattelpunkt	f′ berührt die x-Achse



Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Abb. 8: Graphisches Ableiten – f(x), f'(x) und f''(x) im Vergleich

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

9 Steckbriefaufgaben

Bei Steckbriefaufgaben wird eine Funktion aus gegebenen Eigenschaften (Bedingungen) rekonstruiert. Man stellt ein Gleichungssystem auf und löst es.

Beispiel: "Eine Funktion 4. Grades hat den Hochpunkt H(3|4), den Tiefpunkt ..." – Wie lautet ihr Funktionsterm?

Vorgehensweise:

- Allgemeinen Ansatz aufstellen: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
- Bedingungen in Gleichungen übersetzen:
- **Punkt $P(x_0|y_0)$:** $f(x_0) = y_0$
- **Extremstelle bei x_0:** $f'(x_0) = 0$
- **Wendestelle bei x_0:** $f''(x_0) = 0$
- **Steigung m bei x_0:** $f'(x_0) = m$
- Gleichungssystem lösen (z.B. mit GTR oder Additionsverfahren).

> **ℹ Tipp:**
> Die Anzahl der Bedingungen muss gleich der Anzahl der Unbekannten sein. Eine Funktion n-ten Grades hat (n+1) Koeffizienten und benötigt daher (n+1) Bedingungen.

10 Extremwertaufgaben

Bei Extremwertaufgaben soll eine Größe (z.B. Fläche, Volumen, Kosten) maximiert oder minimiert werden, oft unter einer Nebenbedingung.

Vorgehensweise in 5 Schritten:

- Schritt 1: Zielfunktion aufstellen (was soll maximiert/minimiert werden?).
- Schritt 2: Nebenbedingung identifizieren (welche Einschränkung gibt es?).
- Schritt 3: Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen → Funktion einer Variablen.
- Schritt 4: Ableitung bilden, gleich null setzen, Extremstelle bestimmen.
- Schritt 5: Art des Extremums prüfen (Hochpunkt oder Tiefpunkt?).

Beispiel: Rechteck mit maximalem Flächeninhalt bei gegebenem Umfang U.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Zielfunktion:	$A(x) = x \cdot y$
Nebenbedingung:	$2x + 2y = U \;\Rightarrow\; y = U/2 - x$
Einsetzen:	$A(x) = x \cdot (U/2 - x) = Ux/2 - x^2$

Ableitung und Nullsetzen:

$$A'(x) = U/2 - 2x = 0$$
$$x = U/4$$
$$A''(x) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum!}$$

ℹ Ergebnis:
Das Quadrat (x = y = U/4) hat bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt.

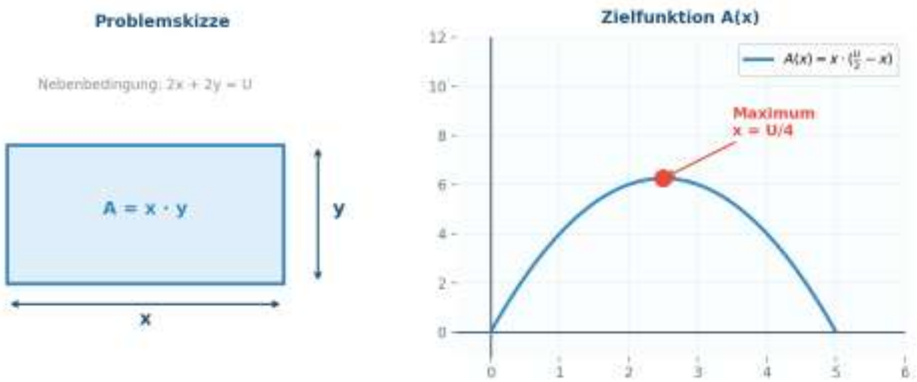


Abb. 9: Extremwertaufgabe – Problemskizze und Zielfunktion

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

11 Wachstum und Zerfall

Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall werden durch Funktionen der Form N(t) = $N_0 \cdot e^{kt}$ beschrieben, wobei k die Wachstums- bzw. Zerfallskonstante ist.

Wachstum (k > 0):	$N(t) = N_0 \cdot e^{kt} \quad \text{mit } k > 0$

Zerfall (k < 0):	$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt} \quad \text{mit } k > 0$

11.1 Verdopplungszeit und Halbwertszeit

Verdopplungszeit:	$t_2 = \ln(2) / k$

Halbwertszeit:	$t½ = \ln(2) / k$

Die Verdopplungs- bzw. Halbwertszeit hängt nur von k ab, nicht vom Anfangswert N_0.

11.2 Begrenzte Wachstumsmodelle

Begrenztes Wachstum:	$N(t) = S - (S - N_0) \cdot e^{-kt}$

S = Schranke (Sättigungswert): Der Wert, dem sich N(t) für t → ∞ annähert.

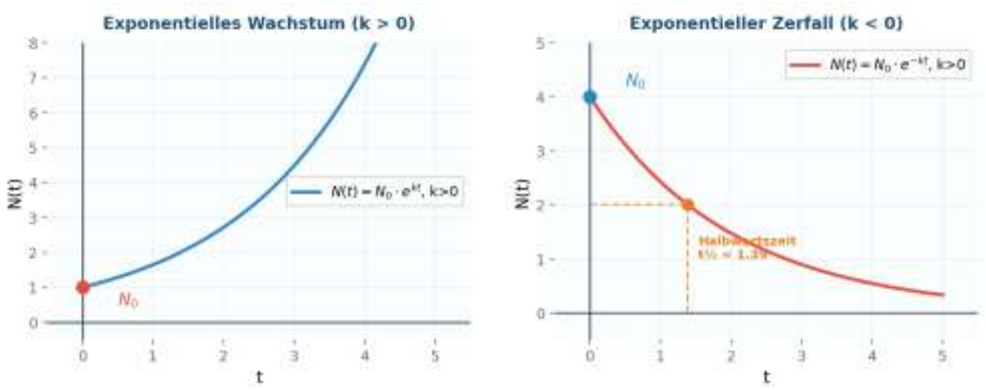


Abb. 10: Exponentielles Wachstum (links) und exponentieller Zerfall mit Halbwertszeit (rechts)

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

⚠ Abitur-Tipp:
Die Ableitung $N'(t) = k \cdot N(t)$ zeigt: Die Änderungsrate ist proportional zum aktuellen Bestand. Dies ist die Grundeigenschaft exponentiellen Wachstums/Zerfalls.