Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Analysis

Funktionen

Zusammenfassung der wichtigsten Konzepte

1 Funktionstypen

Im Bereich der Analysis unterscheidet man verschiedene grundlegende Funktionstypen, die jeweils eigene Eigenschaften und Anwendungsbereiche besitzen.

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Ganzrationale Funktionen sind Summen von Potenzfunktionen mit ganzzahligen, nicht-negativen Exponenten. Der höchste Exponent bestimmt den Grad der Funktion.

Allgemeine Form:	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Beispiel:	$f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

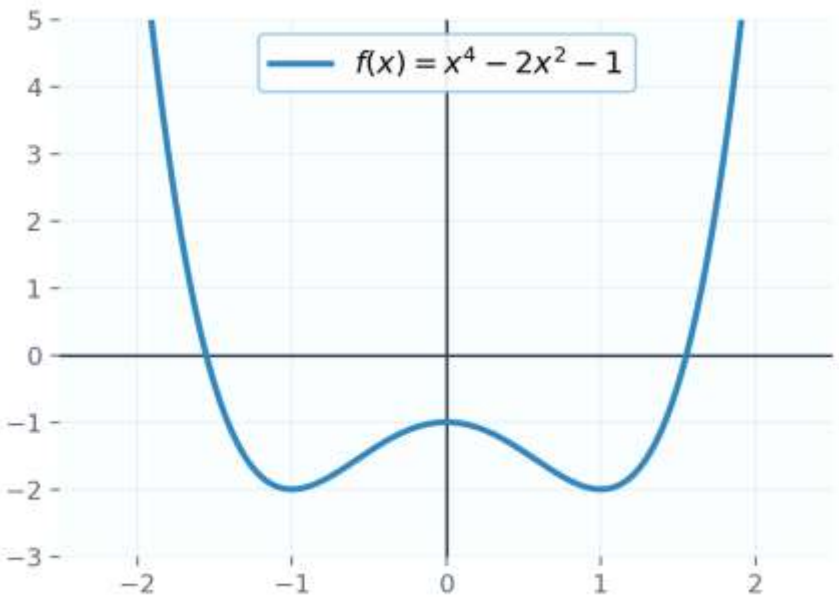

Abb. 1: Graph der ganzrationalen Funktion f(x) = $x^4 - 2x^2 - 1$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Wichtige Eigenschaften:

- Der Grad n bestimmt die maximale Anzahl an Nullstellen und Extremstellen.
- Gerader Grad: Beide Enden des Graphen zeigen in dieselbe Richtung.
- Ungerader Grad: Die Enden zeigen in entgegengesetzte Richtungen.
- Ableitungsregeln: Potenzregel $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ sowie Summen- und Faktorregel.

1.2 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen beschreiben Wachstums- und Zerfallsprozesse. Die natürliche Exponentialfunktion mit der Basis e ≈ 2,718 spielt dabei eine zentrale Rolle.

Allgemeine Form:	$f(x) = a \cdot e^{bx} + d$

Beispiel:	$f(x) = e^{x} - 2$

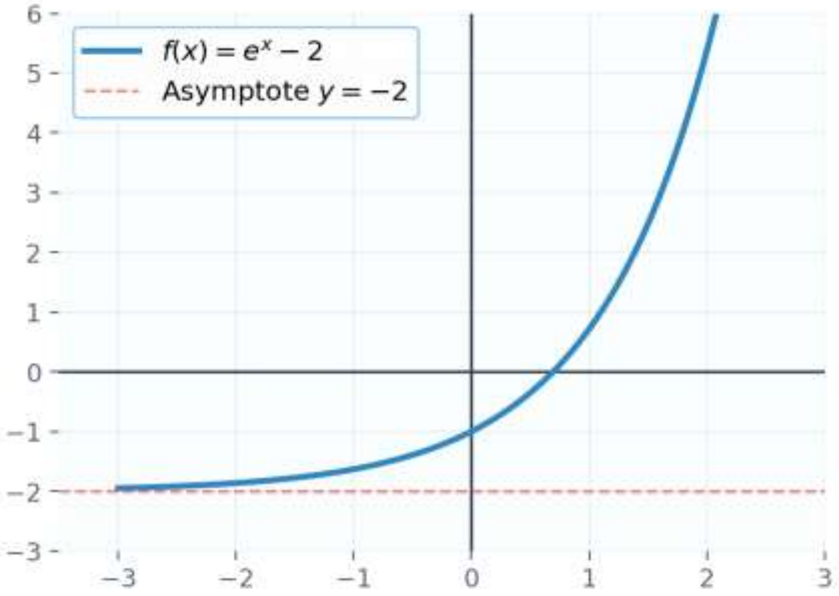

Abb. 2: Graph der Exponentialfunktion $f(x) = e^x - 2$ mit Asymptote $y = -2$

Wichtige Eigenschaften:

- Die Funktion $f(x) = e^x$ ist ihre eigene Ableitung: $f'(x) = e^x$.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

- Es gibt eine waagerechte Asymptote (hier: $y = -2$).
- Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert (keine Nullstelle bei e^x, aber möglich mit Verschiebung).
- Kettenregel bei zusammengesetzten Exponentialfunktionen beachten.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

1.3 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen sind periodisch und beschreiben Schwingungsvorgänge. Die wichtigsten Vertreter sind Sinus und Kosinus.

Allgemeine Form:	$f(x) = a \cdot \sin(b{\cdot}x + c) + d$

Beispiel:	$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

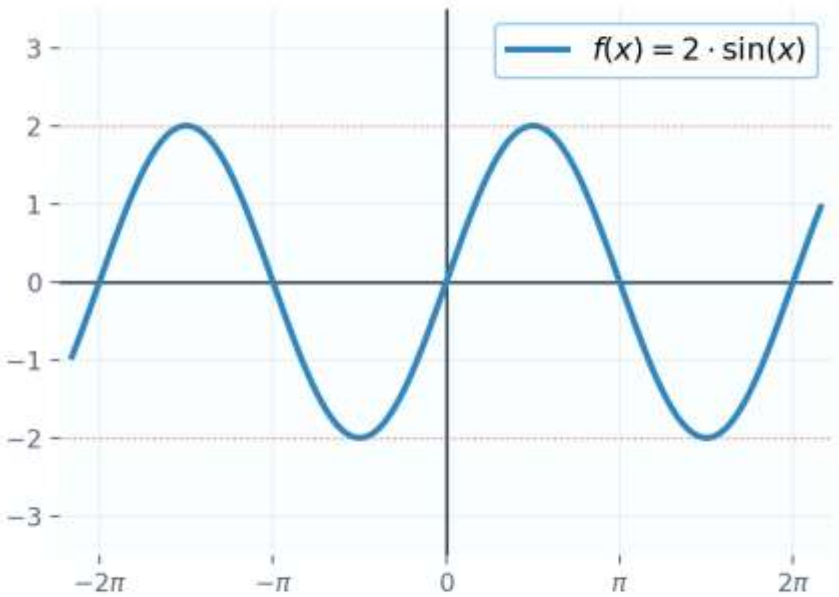

Abb. 3: Graph der trigonometrischen Funktion f(x) = 2·sin(x)

Wichtige Eigenschaften:

- Periode: Die Standardperiode von sin(x) und cos(x) beträgt 2π.
- Amplitude: Der Parameter a bestimmt die Amplitude (hier: a = 2).
- Ableitung: sin′(x) = cos(x) und cos′(x) = –sin(x).
- Wertebereich: [–a + d, a + d], hier also [–2, 2].

2 Nullstellenansatz

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Der Nullstellenansatz ermöglicht es, ganzrationale Funktionen direkt aus ihren Nullstellen aufzustellen. Ist x_0 eine Nullstelle, so ist $(x - x_0)$ ein Linearfaktor.

Allgemeiner Ansatz:	$f(x) = a \cdot (x - x_1)^{n1} \cdot (x - x_2)^{n2} \cdot \ldots$

Beispiel:	$f(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)$

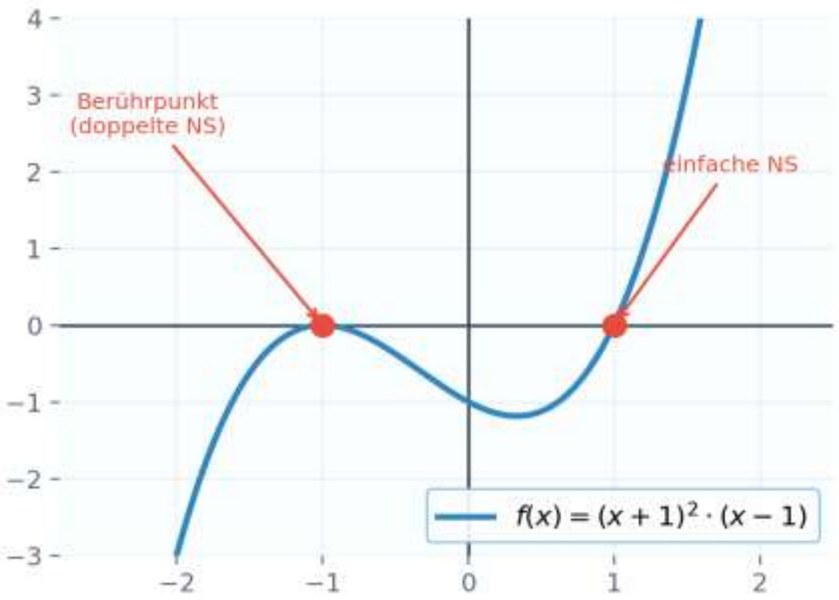

Abb. 4: Nullstellenansatz – Berührpunkt (doppelte NS) und einfache Nullstelle

Analyse des Beispiels:

- Nullstelle $x_1 = -1$ mit Vielfachheit 2 (doppelte Nullstelle → Berührpunkt).
- Nullstelle $x_2 = 1$ mit Vielfachheit 1 (einfache Nullstelle → Vorzeichenwechsel).
- Grad der Funktion: 2 + 1 = 3 (kubische Funktion).

Merke:

- **Einfache Nullstelle (ungerade Vielfachheit):** Graph schneidet die x-Achse.
- **Doppelte Nullstelle (gerade Vielfachheit):** Graph berührt die x-Achse (kein Vorzeichenwechsel).

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

3 Symmetrie

Symmetrieeigenschaften erleichtern das Zeichnen und Analysieren von Funktionsgraphen erheblich. Man unterscheidet zwei Haupttypen:

3.1 Achsensymmetrie zur y-Achse

Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

Bedingung:	$f(-x) = f(x)\;\;\text{für alle } x$

- Solche Funktionen heißen gerade Funktionen.
- Ganzrationale Funktionen mit ausschließlich geraden Exponenten sind achsensymmetrisch.
- Beispiele: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4 - 2x^2$, $f(x) = \cos(x)$.

3.2 Punktsymmetrie zum Ursprung

Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt:

Bedingung:	$f(-x) = -f(x)\;\;\text{für alle } x$

- Solche Funktionen heißen ungerade Funktionen.
- Ganzrationale Funktionen mit ausschließlich ungeraden Exponenten sind punktsymmetrisch.
- Beispiele: $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5 - 3x$, $f(x) = \sin(x)$.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

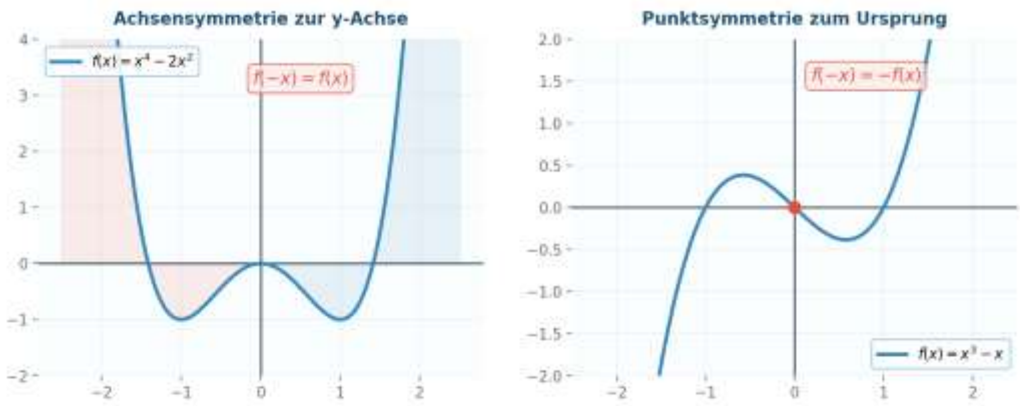

Abb. 5: Achsensymmetrie (links) und Punktsymmetrie (rechts) im Vergleich

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

4 Spiegeln, Strecken und Verschieben

Durch Transformationen können Funktionsgraphen systematisch verändert werden. Ausgehend von einer Grundfunktion f(x) gelten folgende Regeln:

4.1 Verschiebungen

In y-Richtung:	$g(x) = f(x) + d \quad (d > 0\text{: nach oben})$

In x-Richtung:	$g(x) = f(x - c) \quad (c > 0\text{: nach rechts})$

4.2 Streckungen und Stauchungen

In y-Richtung:	$g(x) = a \cdot f(x) \quad (\lvert a \rvert > 1\text{: Streckung})$

In x-Richtung:	$g(x) = f(b \cdot x) \quad (\lvert b \rvert > 1\text{: Stauchung})$

4.3 Spiegelungen

An der x-Achse:	$g(x) = -f(x)$

An der y-Achse:	$g(x) = f(-x)$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

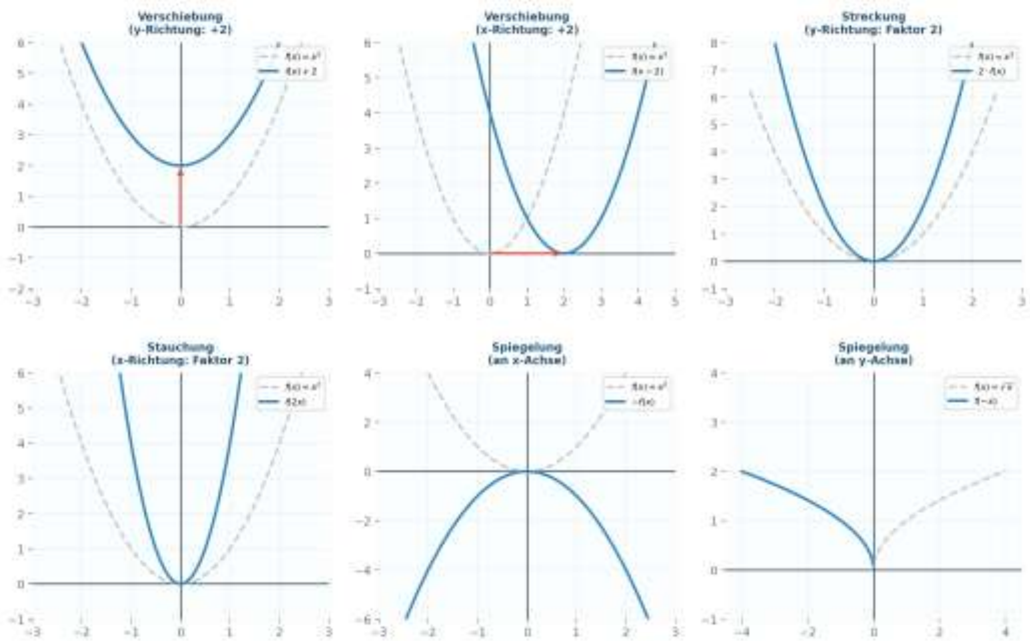

Abb. 6: Übersicht aller Transformationen am Beispiel von $f(x) = x^2$

Tipp: Bei der Kombination mehrerer Transformationen ist die Reihenfolge entscheidend. Innere Transformationen (am x) werden zuerst angewendet, dann äußere (am Funktionswert).