Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Analysis

Gleichungen

Gleichungstypen und Lösungsstrategien

Teil I – Gleichungstypen

1 Polynomgleichungen (1.–4. Grades)

Polynomgleichungen werden nach ihrem Grad klassifiziert. Der Grad bestimmt die maximale Anzahl an Lösungen und die geeignete Lösungsmethode.

1.1 Gleichungen 1. Grades (linear)

Beispiel:	$2x - 4 = 0$

Lösung durch einfache Gegenoperation:

$$2x - 4 = 0 \quad | +4$$
$$2x = 4 \quad | \div 2$$
$$x = 2$$

ℹ Merke:
Lineare Gleichungen haben genau eine Lösung. Die Gegenoperation ist hier die Division.

1.2 Gleichungen 2. Grades (quadratisch)

Beispiel:	$2x^2 - 4 = 0$

Lösung durch Umformen und Wurzelziehen:

$$2x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$
$$2x^2 = 4 \quad | \div 2$$
$$x^2 = 2 \quad | \sqrt{}$$
$$x_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \quad x_2 = -\sqrt{2} \approx -1{,}41$$

Allgemein (p-q-Formel):	$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{((p/2)^2 - q)}$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

> **ℹ Diskriminante:**
> D = (p/2)² – q bestimmt die Anzahl der Lösungen: D > 0 → zwei Lösungen, D = 0 → eine Lösung, D < 0 → keine reelle Lösung.

1.3 Gleichungen 3. Grades (kubisch)

Beispiel:	$2x^3 - 4 = 0$

Lösung durch Umformen:

$$2x^3 = 4 \qquad | \div 2$$
$$x^3 = 2 \qquad | \sqrt[3]{\ }$$
$$x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$$

> **ℹ Merke:**
> Kubische Gleichungen haben mindestens eine und höchstens drei reelle Lösungen. Die ungerade Wurzel ist die Gegenoperation.

1.4 Gleichungen 4. Grades (quartisch)

Beispiel:	$2x^4 - 4 = 0$

Lösung durch Umformen:

$$2x^4 = 4 \qquad | \div 2$$
$$x^4 = 2 \qquad | \sqrt[4]{\ }$$
$$x_1 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}19 \quad x_2 = -\sqrt[4]{2} \approx -1{,}19$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

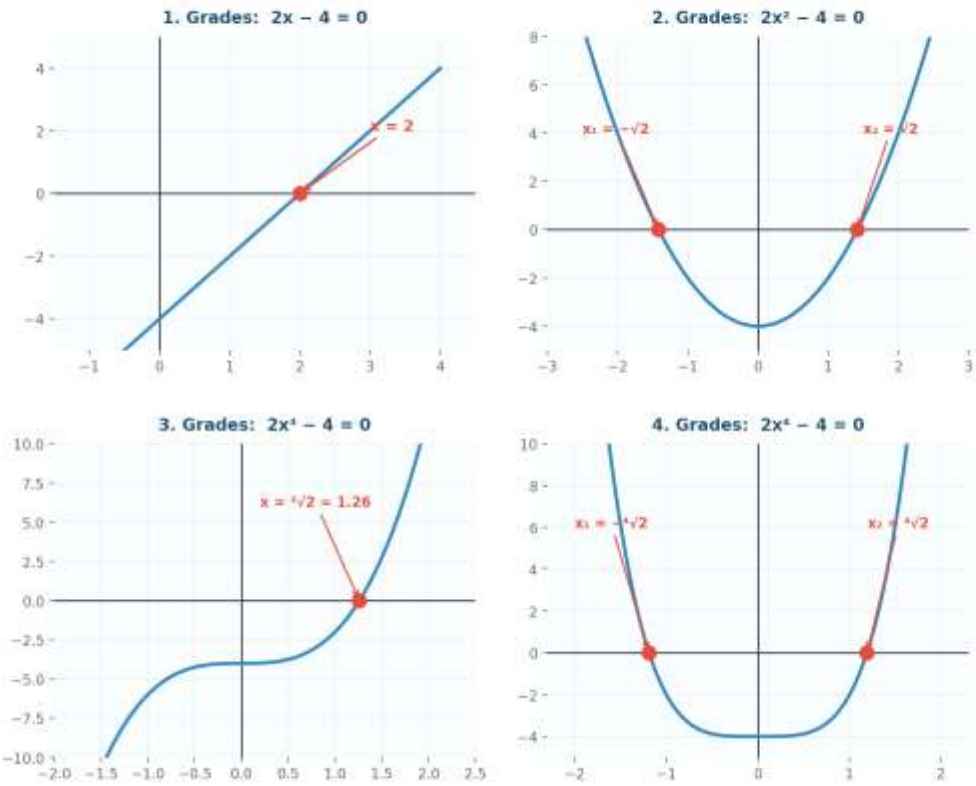


Abb. 1: Graphische Lösung von Polynomgleichungen 1.–4. Grades

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

2 Exponentialgleichungen

Bei Exponentialgleichungen steht die Unbekannte im Exponenten. Die Gegenoperation zum Exponenten mit Basis e ist der natürliche Logarithmus ln.

Beispiel:	$e^x = 0{,}5$

Lösung durch Logarithmieren:

$$e^x = 0{,}5 \quad | \ln$$
$$x = \ln(0{,}5)$$
$$x \approx -0{,}693$$

Allgemeine Strategie:	$e^{f(x)} = a \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \ln(a)$

⚠ Achtung:
Der Logarithmus ist nur für positive Werte definiert: ln(a) existiert nur für a > 0. Die Gleichung $e^x = -2$ hat daher keine Lösung!

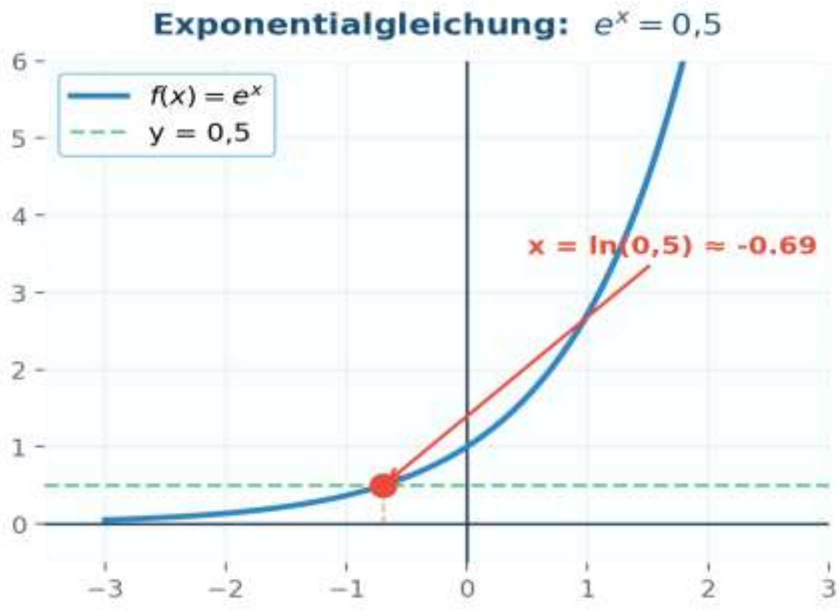


Abb. 2: Graphische Lösung der Exponentialgleichung $e^x = 0{,}5$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

3 Trigonometrische Gleichungen

Bei trigonometrischen Gleichungen ist die Unbekannte das Argument einer trigonometrischen Funktion. Die Gegenoperation zu sin ist die Arkusfunktion $\sin^{-1}$.

Beispiel:	$\sin(x) = 0{,}5$

Lösung mit Arkusfunktion:

$$\sin(x) = 0{,}5 \qquad |\ \sin^{-1}$$
$$x_1 = \sin^{-1}(0{,}5) = \pi/6 \approx 30°$$
$$x_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6 \approx 150° \quad \text{(zweite Lösung im Intervall } [0, 2\pi])$$

Allgemeine Lösung:	$x = \pi/6 + k \cdot 2\pi \ \text{ oder } \ x = 5\pi/6 + k \cdot 2\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

ℹ Periodizität:
Wegen der Periodizität von sin und cos gibt es unendlich viele Lösungen. Oft wird nur das Intervall [0, 2π] betrachtet.

Abb. 3: Lösungen von sin(x) = 0,5 im Intervall [0, 2π]

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

4 Bruchgleichungen

Bei Bruchgleichungen kommt die Variable im Nenner vor. Vor dem Lösen muss die Definitionsmenge bestimmt werden, da der Nenner nicht null werden darf.

Beispiel:	$x / (x + 1) = 3$

Definitionsmenge: D = ℝ \ {–1}, da für x = –1 der Nenner null wird.

Lösung durch Multiplikation mit dem Nenner:

$x / (x + 1) = 3 \quad | \cdot (x + 1)$
$x = 3(x + 1)$
$x = 3x + 3$
$-2x = 3 \quad | \div (-2)$
$x = -1{,}5 \quad$ ✓ (liegt in D)

⚠ Probe nicht vergessen!
Die Lösung muss in der Definitionsmenge liegen. Scheinlösungen (Lösungen außerhalb von D) müssen ausgeschlossen werden.

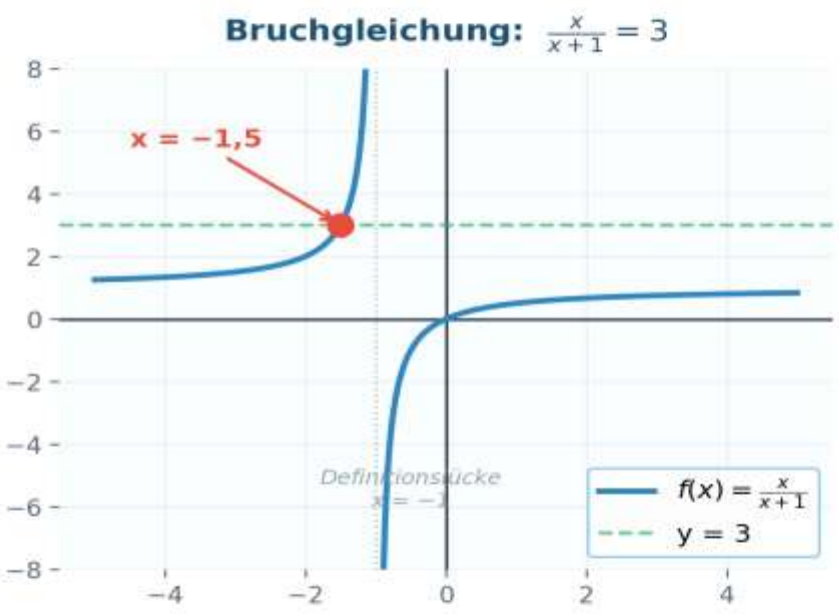


Abb. 4: Bruchgleichung x/(x+1) = 3 mit Definitionslücke bei x = –1

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

5 Ungleichungen

Bei Ungleichungen sucht man alle x-Werte, für die ein Ausdruck größer (oder kleiner) als null ist. Die Lösung ist in der Regel ein Intervall.

Beispiel:	$(2x - 1) \cdot e^x > 0$

Analyse der Faktoren:

- **Faktor e^x:** Ist für alle x stets positiv ($e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$).
- **Faktor (2x – 1):** Ist positiv für x > 0,5 und negativ für x < 0,5.

Lösung:	$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0{,}5 \} = (0{,}5; \infty)$

⚠ Vorzeichenregel:
Bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

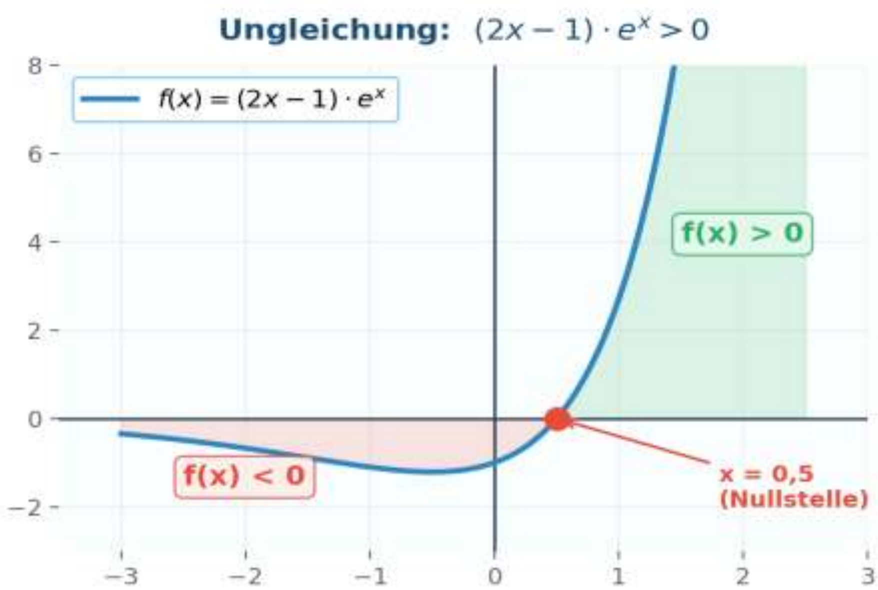


Abb. 5: Vorzeichenanalyse der Ungleichung (2x–1)·eˣ > 0

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

6 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus mehreren linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Graphisch entspricht die Lösung dem Schnittpunkt der Geraden.

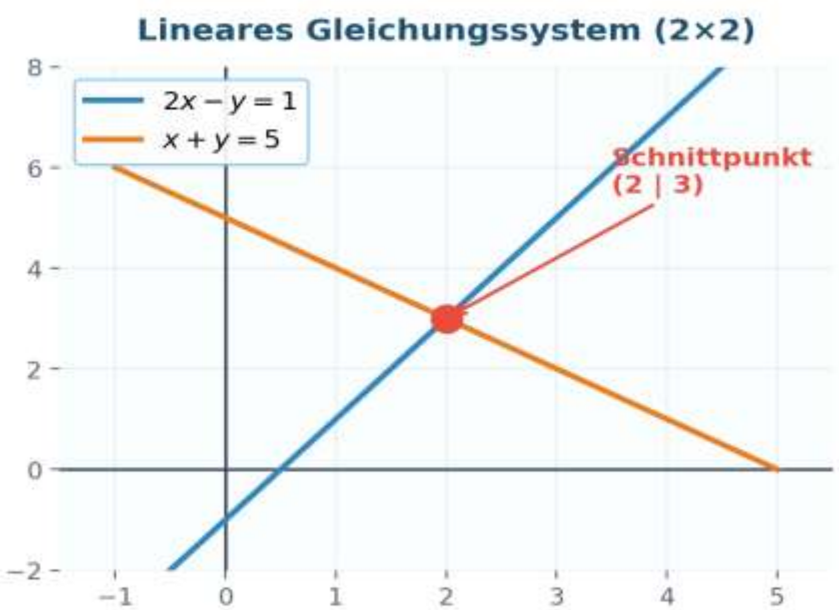
Beispiel (2×2):	I: $2x - y = 1$ II: $x + y = 5$

Lösung mit dem Additionsverfahren:

$$\begin{aligned} &\text{I} + \text{II: } 2x - y + x + y = 1 + 5 \\ &\quad 3x = 6 \\ &\quad x = 2 \\ &\text{In II: } 2 + y = 5 \Rightarrow y = 3 \\ &\text{Lösung: } (x \mid y) = (2 \mid 3) \end{aligned}$$

Lösungsverfahren im Überblick:

- **Einsetzungsverfahren:** Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die andere einsetzen.
- **Gleichsetzungsverfahren:** Beide Gleichungen nach derselben Variablen auflösen und gleichsetzen.
- **Additionsverfahren:** Gleichungen so addieren/subtrahieren, dass eine Variable wegfällt.



Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Abb. 6: Graphische Lösung des LGS als Schnittpunkt zweier Geraden

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Teil II – Lösungsstrategien

7 Gegenoperationen

Gegenoperationen (Umkehroperationen) sind das wichtigste Werkzeug zum Lösen von Gleichungen. Jede mathematische Operation hat eine Gegenoperation:

Operation	Gegenoperation	Beispiel
+ a	– a	$x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4$
· a	÷ a	$2x = 6 \Rightarrow x = 3$
x^2	√ (Quadratwurzel)	$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
x^3	^{3}√ (Kubikwurzel)	$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
x^4	^{4}√ (4. Wurzel)	$x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$
e^x	ln (nat. Logarithmus)	$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln(5)$
sin(x)	$\sin^{-1}$ (Arkussinus)	$\sin(x) = 0{,}5 \Rightarrow x = \pi/6$
cos(x)	$\cos^{-1}$ (Arkuskosinus)	$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \pi/2$

8 Satz vom Nullprodukt

Der Satz vom Nullprodukt ist eine zentrale Lösungsstrategie für faktorisierte Gleichungen:

Satz:	$A \cdot B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \text{ oder } B = 0$

Wenn ein Produkt null ist, muss mindestens einer der Faktoren null sein. Diese Strategie wird besonders bei Gleichungen eingesetzt, die sich als Produkt schreiben lassen.

Beispiel: $(x + 1)(x – 2) = 0$

$$\text{Faktor 1: } x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$
$$\text{Faktor 2: } x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$
$$L = \{-1, 2\}$$

Typische Anwendung: $x \cdot e^x = 0$. Da $e^x \neq 0$ für alle x, folgt x = 0.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

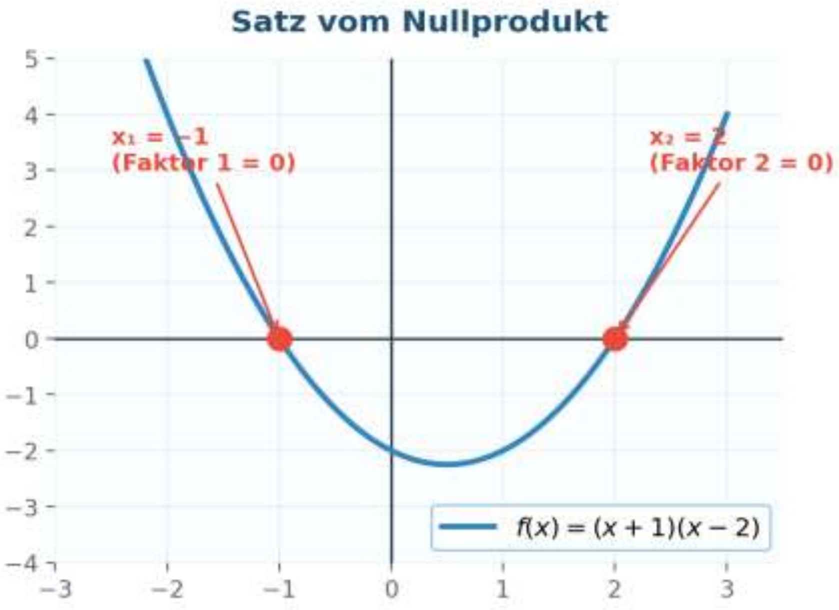


Abb. 7: Satz vom Nullprodukt am Beispiel f(x) = (x+1)(x–2)

9 Substitution

Die Substitution vereinfacht komplexe Gleichungen, indem ein Teilausdruck durch eine neue Variable ersetzt wird. Besonders nützlich bei biquadratischen Gleichungen.

Beispiel: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Schritt 1: Substitution $z = x^2$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Schritt 2: Quadratische Gleichung lösen (p-q-Formel)

$$z_1 = 4, \quad z_2 = 1$$

Schritt 3: Rücksubstitution $z = x^2$

$$x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 2,\; x_2 = -2$$
$$x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x_3 = 1,\; x_4 = -1$$
$$L = \{-2, -1, 1, 2\}$$

> **ℹ Wann substituieren?**

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Immer wenn eine Gleichung nur gerade Potenzen einer Variablen enthält (z.B. x^4 und x^2, oder e^{2x} und e^x), lässt sich durch Substitution der Grad halbieren.