

Analysis

Integralrechnung

Stammfunktionen, Flächenberechnung und Anwendungen

1 Aufleitungsregeln (Stammfunktionen)

Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist diejenige Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ergibt. Man schreibt: $F'(x) = f(x)$. Jede Stammfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante C eindeutig bestimmt.

Definition:

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$$

1.1 Grundlegende Aufleitungsregeln

f(x)	$F(x) = \int f(x) dx$
x^n ($n \neq -1$)	$1/(n+1) \cdot x^{n+1} + C$
$1/x$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$a^x / \ln(a) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1/\cos^2(x)$	$\tan(x) + C$

1.2 Erweiterte Regeln

Faktorregel:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Summenregel:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Lineare Substitution:

$$\int f(ax + b) dx = 1/a \cdot F(ax + b) + C$$

Beispiel zur linearen Substitution:

$$\int e^{2x+3} dx = 1/2 \cdot e^{2x+3} + C$$

$$\int \sin(3x) dx = -1/3 \cdot \cos(3x) + C$$

$$\int (2x+1)^4 dx = 1/2 \cdot 1/5 \cdot (2x+1)^5 + C = 1/10 \cdot (2x+1)^5 + C$$

⚠ Achtung:

Die lineare Substitution funktioniert nur bei linearen inneren Funktionen ($ax + b$). Für andere innere Funktionen muss die allgemeine Substitutionsregel oder partielle Integration verwendet werden.

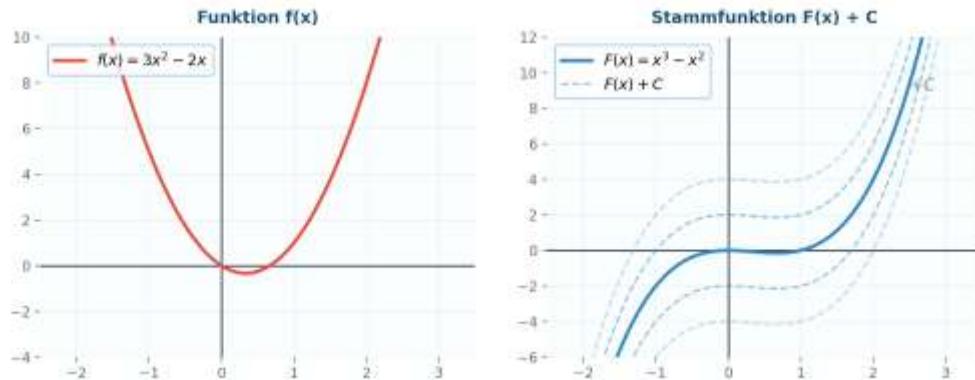


Abb. 1: Funktion $f(x)$ und zugehörige Stammfunktionen $F(x) + C$

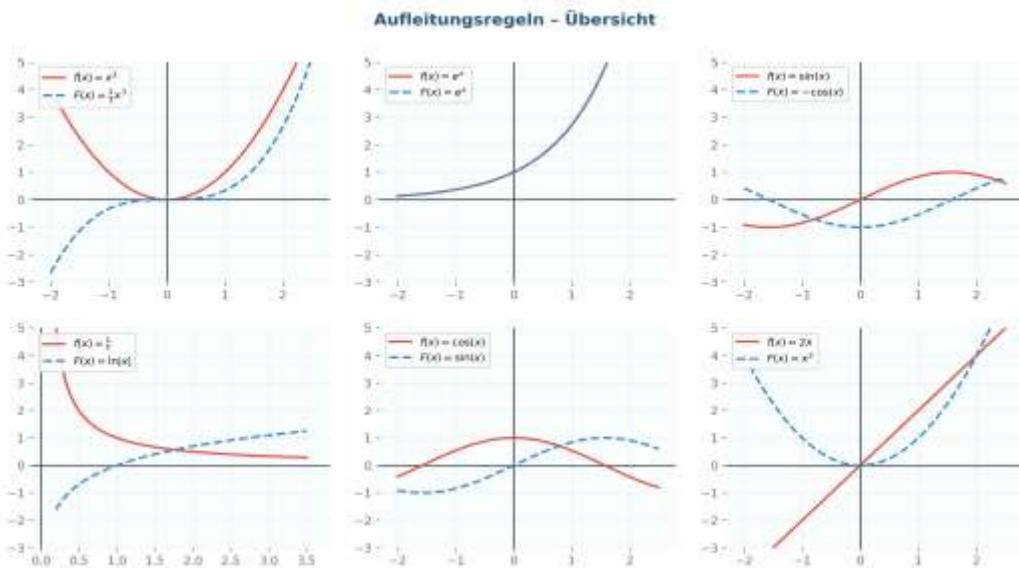


Abb. 2: Visualisierung der wichtigsten Aufleitungsregeln (rot: f , blau: F)

2 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ berechnet den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im Intervall $[a, b]$.

2.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz stellt die Verbindung zwischen Ableitung und Integral her. Er besagt, dass man bestimmte Integrale mithilfe einer Stammfunktion berechnen kann:

Hauptsatz:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (2x - 2) dx &= [x^2 - 2x]_1^3 \\ &= (3^2 - 2 \cdot 3) - (1^2 - 2 \cdot 1) \\ &= (9 - 6) - (1 - 2) \\ &= 3 - (-1) = 4 \end{aligned}$$

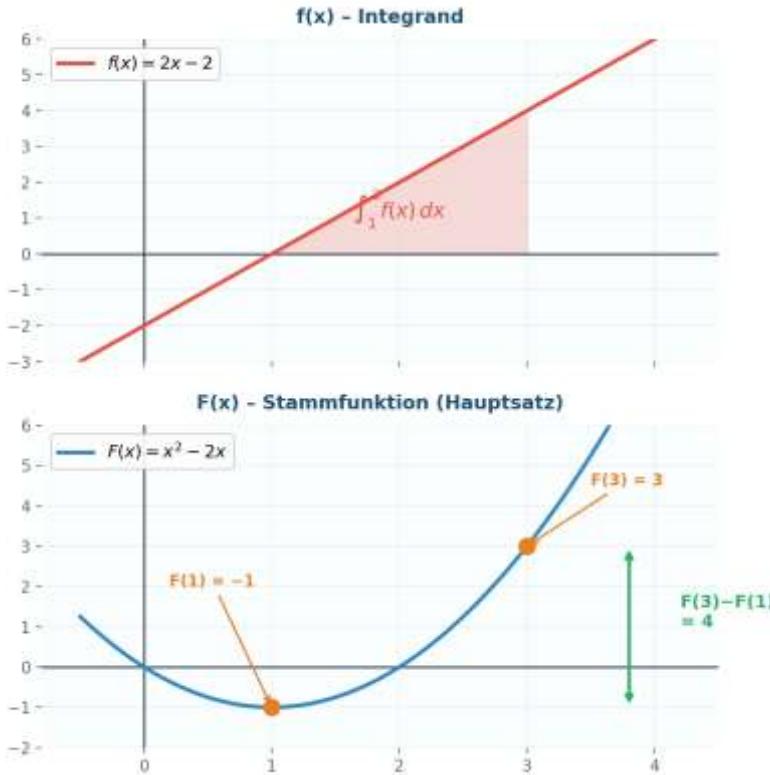


Abb. 3: Hauptsatz – Zusammenhang zwischen $f(x)$, $F(x)$ und dem Integral

2.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

Vertauschung:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Zerlegung:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Gleiches Intervall:

$$\int_{aa} f(x) dx = 0$$

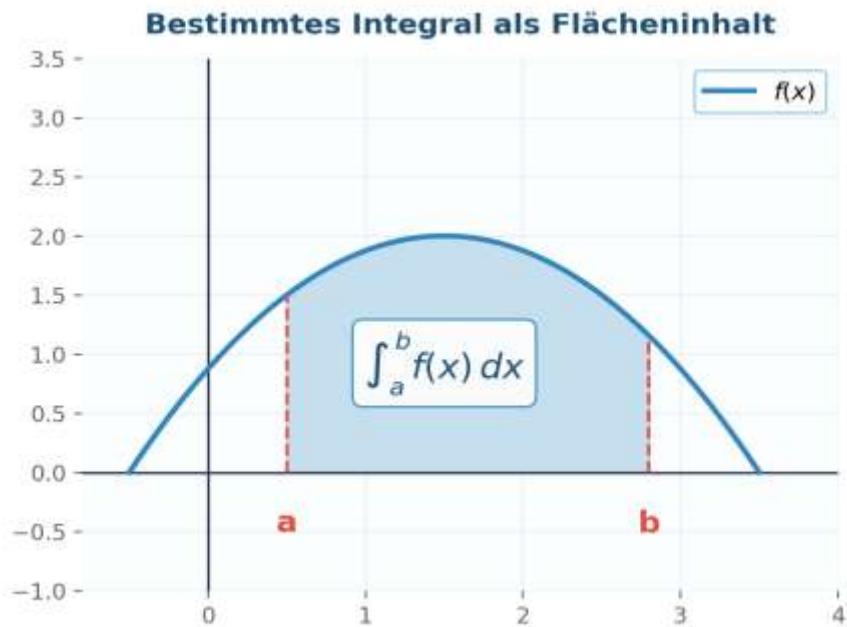


Abb. 4: Das bestimmte Integral als Fläche unter der Kurve

3 Fläche zwischen Schaubild und x-Achse

Beim bestimmten Integral werden Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt. Für die tatsächliche Flächenberechnung muss man daher den Betrag verwenden.

3.1 Fläche bei positivem Funktionswert

Liegt der Graph vollständig oberhalb der x-Achse im Intervall $[a, b]$, so gilt:

Fläche:	$A = \int_a^b f(x) dx$
---------	------------------------

3.2 Fläche bei Vorzeichenwechsel

Wenn der Graph die x-Achse schneidet, muss man die Nullstellen bestimmen und die Flächen getrennt berechnen:

Gesamtfläche:	$A = \int_a^x_0 f(x) dx + \int_x^b f(x) dx + \dots$
---------------	---

Vorgehensweise:

- Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ bestimmen.
- Intervall an den Nullstellen in Teilintervalle zerlegen.
- Integral über jedes Teilintervall berechnen.
- Beträge der Teilintegrale addieren.

Beispiel: $A = |\int_0^2 f(x) dx| + |\int_2^3 f(x) dx|$

⚠ Häufiger Fehler:

Ohne Betragsbildung können sich positive und negative Flächenanteile gegenseitig aufheben! Das Integral allein liefert nicht den Flächeninhalt, wenn der Graph die x-Achse schneidet.

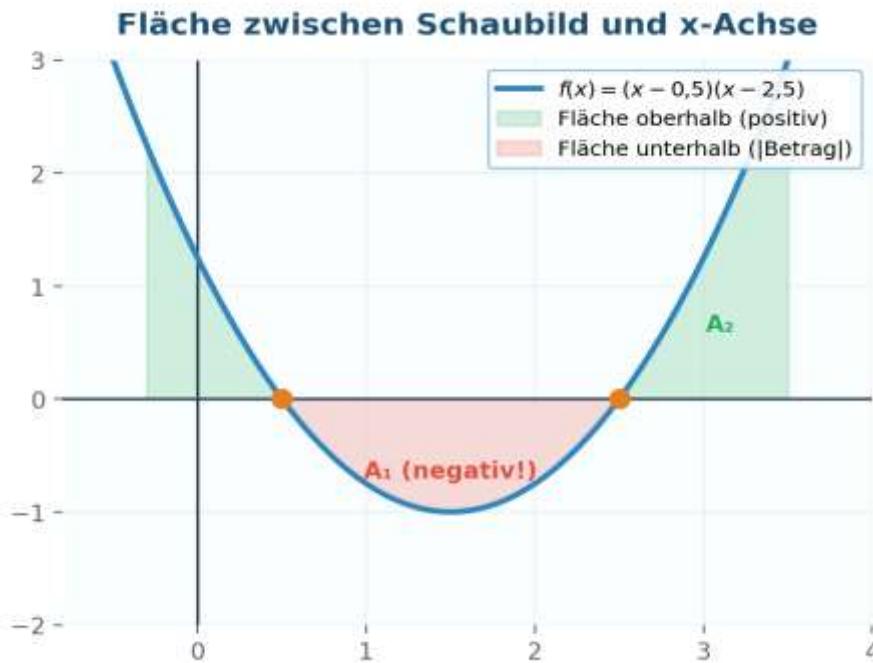


Abb. 5: Fläche zwischen Graph und x-Achse – Betragsbildung bei negativen Anteilen

4 Fläche zwischen zwei Kurven

Die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen $f(x)$ und $g(x)$ wird über die Differenz der Funktionen berechnet.

Flächenformel:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Vorgehensweise:

- Schnittpunkte von f und g bestimmen: $f(x) = g(x)$.
- Feststellen, welche Funktion im jeweiligen Intervall oben liegt.
- Integral der Differenz (obere – untere Funktion) berechnen.
- Bei mehreren Intervallen: Teilflächen einzeln berechnen und addieren.

Beispiel: $f(x) = -(x-1,5)^2 + 3$ und $g(x) = 0,5x$

Schritt 1: Schnittpunkte bestimmen durch $f(x) = g(x)$

Schritt 2: Im Intervall $[x_1, x_2]$ liegt f oberhalb von g

Schritt 3: $A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx$

i Vereinfachung:

Wenn $f(x) \geq g(x)$ im gesamten Intervall $[a, b]$, kann man direkt $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ ohne Betragsstriche rechnen.

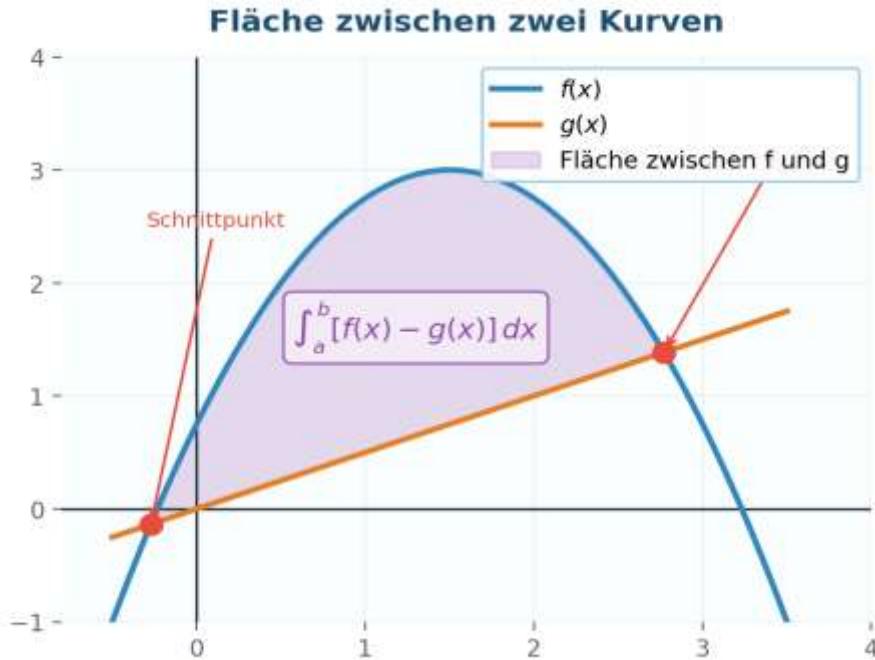


Abb. 6: Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$

5 Anwendungen der Integralrechnung

Die Integralrechnung hat zahlreiche praktische Anwendungen, die im Abitur eine wichtige Rolle spielen.

5.1 Mittlerer Funktionswert

Der mittlere Funktionswert gibt den Durchschnittswert einer Funktion über ein Intervall an:

Mittelwert:

$$\bar{f} = 1/(b-a) \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Anschaulich: Das Rechteck mit den Seiten $(b-a)$ und \bar{f} hat denselben Flächeninhalt wie die Fläche unter dem Graphen.



Abb. 7: Mittlerer Funktionswert – Fläche unter f entspricht dem Rechteck

5.2 Rekonstruktion von Größen

Wenn $f(x)$ eine Änderungsrate beschreibt, liefert das Integral die Gesamtveränderung:

Gesamtveränderung:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Typische Kontexte im Abitur:

- **Geschwindigkeit → Weg:** $s = \int v(t) dt$
- **Zulaufrate → Volumen:** $V = \int q(t) dt$
- **Wachstumsrate → Bestand:** $\Delta N = \int N'(t) dt$
- **Leistung → Arbeit:** $W = \int P(t) dt$

5.3 Rotationskörper (Volumenberechnung)

Wird der Graph von f um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationskörper. Sein Volumen berechnet sich mit:

Rotationsvolumen:	$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$
-------------------	--------------------------------------

Beispiel: Rotation von $f(x) = \sqrt{x}$ um die x-Achse im Intervall $[0, 4]$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 x dx \\ V &= \pi \cdot [\frac{1}{2}x^2]_0^4 = \pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot 16 - 0) = 8\pi \end{aligned}$$

5.4 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale treten auf, wenn eine Integrationsgrenze unendlich ist oder der Integrand eine Polstelle besitzt:

Definition:	$\int_a^\infty f(x) dx = \lim(b \rightarrow \infty) \int_a^b f(x) dx$
-------------	---

Beispiel: $\int_1^\infty 1/x^2 dx = \lim(b \rightarrow \infty) [-1/x]_1^b = \lim(b \rightarrow \infty) (-1/b + 1) = 1$

i Konvergenz:

Ein uneigentliches Integral konvergiert, wenn der Grenzwert existiert und endlich ist. Andernfalls divergiert es. Wichtig: $\int_1^\infty 1/x dx$ divergiert, aber $\int_1^\infty 1/x^2 dx$ konvergiert!

Zusammenfassung: Wichtige Formeln

Thema	Formel
-------	--------

Stammfunktion	$F'(x) = f(x)$
Unbestimmtes Integral	$\int f(x) dx = F(x) + C$
Bestimmtes Integral	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
Fläche (x-Achse)	$A = \int_a^b f(x) dx$
Fläche (2 Kurven)	$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$
Mittelwert	$\bar{f} = 1/(b-a) \cdot \int_a^b f(x) dx$
Rotationsvolumen	$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$
Lineare Substitution	$\int f(ax+b) dx = 1/a \cdot F(ax+b) + C$

⌚ Abitur-Tipp:

Beim Abitur im Basiskurs Baden-Württemberg sind besonders wichtig: Stammfunktionen bestimmen (Aufleitung), Flächen zwischen Graph und x-Achse berechnen, Flächen zwischen zwei Kurven bestimmen, und Sachkontexte mit Integralrechnung lösen (z.B. Rekonstruktion von Größen).