Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Analysis - Lösungen

Abitur Basiskurs – Baden-Württemberg

A1) Exponentialfunktion

Gegeben: $f(t) = 24 - 20e^{-0,5t}$

a) Anfangstemperatur
Die Anfangstemperatur ist $f(0)$:

$$f(0) = 24 - 20e^{-0,5\cdot 0} = 24 - 20 \cdot e^0 = 24 - 20 \cdot 1 = 4$$

Die Anfangstemperatur beträgt 4 Einheiten.

b) Monotonieverhalten
Erste Ableitung:

$$f'(t) = -20 \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5t} = 10e^{-0,5t}$$

Da $e^{-0,5t} > 0$ für alle t, ist $f'(t) > 0$ für alle t.

Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend.

c) Waagrechte Asymptote
Betrachtung des Grenzwertes für $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty}[24 - 20e^{-0,5t}] = 24 - 20 \cdot 0 = 24$$

Die waagrechte Asymptote ist $y = 24$.

Interpretation: Die Temperatur naehert sich asymptotisch dem Wert 24 an. Das passt z. B. zu einem Erwaermungsprozess: Ein anfangs kalter Koerper (Startwert $f(0) = 4$) erwaermt sich und naehert sich der Raumtemperatur 24 an.

d) Tangente bei t = 1
Steigung an der Stelle $t = 1$:

$$f'(1) = 10e^{-0,5\cdot 1} = 10e^{-0,5} \approx 10 \cdot 0,6065 \approx 6,065$$

Funktionswert:

$$f(1) = 24 - 20e^{-0,5} \approx 24 - 20 \cdot 0,6065 \approx 24 - 12,13 \approx 11,87$$

Tangentengleichung: $y - 11,87 = 6,065(t - 1)$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$y = 6{,}065t + 5{,}805$ oder $y \approx 6{,}07t + 5{,}80$

Exakte Darstellung:

$m = 10e^{-0,5}$ (exakte Steigung)

$f(1) = 24 - 20e^{-0,5}$ (exakter Funktionswert)

Exakte Tangente:

$$y = 10e^{-0,5} \cdot t + (24 - 30e^{-0,5})$$

A2) Ganzrationale Funktion

Gegeben: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

a) Nullstellen
$f(x) = 0$: $x^3 - 3x^2 - 9x = 0$

$$x(x^2 - 3x - 9) = 0$$

$$x_1 = 0$$

Für $x^2 - 3x - 9 = 0$ mit pq-Formel: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9+36}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

$x_2 \approx 4{,}85$, $x_3 \approx -1{,}85$

b) Extrempunkte

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$f'(x) = 0$: $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ \ x_2 = -1$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x = 3$

$f(3) = 27 - 27 - 27 = -27 \Rightarrow$ Tiefpunkt $(3 \mid -27)$

$f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x = -1$

$f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5 \Rightarrow$ Hochpunkt $(-1 \mid 5)$

c) Wendepunkt
$f''(x) = 0$: $6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$f(1) = 1 - 3 - 9 = -11$$

Wendepunkt: $W(1 \mid -11)$

A3) Flächenberechnung

Gegeben: $f(x) = -x^2 + 4x$

a) Schnittpunkte mit x-Achse
$f(x) = 0$: $-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 4$

b) Eingeschlossene Fläche
Die Funktion liegt zwischen 0 und 4 über der x-Achse.

$$A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 32\right) - 0 = -\frac{64}{3} + \frac{96}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$$

A4) Exponentialzerfall

Gegeben: $f(t) = 150e^{-0{,}3t}$

a) Halbwertszeit
Halbwertszeit T: $f(T) = \frac{f(0)}{2}$

$$150e^{-0{,}3T} = 75$$

$$e^{-0{,}3T} = 0{,}5$$

$$-0{,}3T = \ln(0{,}5)$$

$$T = \frac{-\ln(0{,}5)}{0{,}3} = \frac{\ln(2)}{0{,}3} \approx \frac{0{,}693}{0{,}3} \approx 2{,}31$$

Die Halbwertszeit beträgt etwa 2,31 Einheiten.

b) Änderungsrate nach 2 Stunden

$$f'(t) = 150 \cdot (-0{,}3)e^{-0{,}3t} = -45e^{-0{,}3t}$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$f'(2) = -45e^{-0,6} \approx -45 \cdot 0,549 \approx -24,7$$

Die Änderungsrate nach 2 Stunden beträgt etwa $-24,7$ Einheiten pro Stunde.

A5) Parameteraufgabe

Gegeben: $f_a(x) = x^3 - ax$

a) Extrempunkte in Abhängigkeit von a

$$f'_a(x) = 3x^2 - a$$

$f'_a(x) = 0$: $3x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ (für $a > 0$)

$$f''_a(x) = 6x$$

$3x^2 - a = 0 \rightarrow x^2 = \frac{a}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ (für $a > 0$)

2) Funktionswerte einsetzen:

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$= -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = +\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Ergebnis:

Hochpunkt: $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}} \,\middle|\, \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$

Tiefpunkt: $\left(\sqrt{\frac{a}{3}} \,\middle|\, -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$

b) Wendepunkt bei x = 0
$f''_a(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ für alle a

Das ist immer ein Wendepunkt, für alle Werte von a.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$f'''(x) = 6 \neq 0$ bestätigt, dass bei $x = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt (hinreichende Bedingung). Dies gilt auch für $a \leq 0$, wo keine Extrempunkte existieren – der Wendepunkt bei $x = 0$ bleibt trotzdem erhalten

A6) Logarithmusfunktion

Gegeben: $f(x) = \ln(x)$

a) Tangente bei x = 1

$$f(1) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

Tangentengleichung: $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$

b) Gleichung der Normalen
Die Normale hat die Steigung -1 (negative Kehrwert der Tangente).

Normale: $y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$

A7) Exponentialgleichung

Löse: $3e^{0,4x} = 12$

$$e^{0,4x} = 4$$

$$0{,}4x = \ln(4)$$

$$x = \frac{\ln(4)}{0{,}4} \approx \frac{1{,}386}{0{,}4} \approx 3{,}47$$

A8) Monotonie

Untersuche: $f(x) = x^4 - 4x^2$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$$

$f'(x) = 0$: $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$

Vorzeichenanalyse von $f'(x)$:

- $x < -\sqrt{2}$: $f'(x) < 0$ (fallend)

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

- $-\sqrt{2} < x < 0$: $f'(x) > 0$ (steigend)
- $0 < x < \sqrt{2}$: $f'(x) < 0$ (fallend)
- $x > \sqrt{2}$: $f'(x) > 0$ (steigend)

A9) Wendepunkt

Gegeben: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) Wendepunkt

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$$

Wendepunkt: $W(2 \mid 2)$

b) Bedeutung
Der Wendepunkt kennzeichnet den Übergang von Rechtskrümmung zu Linkskrümmung. Die Steigung ist dort am steilsten (lokal).

$$f'(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$$

Am Wendepunkt hat die erste Ableitung ein lokales Minimum ($f'(2) = -3$). Die Funktion fällt dort am steilsten.

A10) Fläche zwischen zwei Graphen

Gegeben: $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4x$

a) Schnittpunkte

$$x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0$$

$x_1 = 0, x_2 = 4$

b) Eingeschlossene Fläche
Für $0 \leq x \leq 4$ liegt $g(x)$ über $f(x)$.

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)\ dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{96}{3} - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$$

A11) Produktionsfunktion

Gegeben: $f(t) = -t^2 + 10t$

a) Maximum

$$f'(t) = -2t + 10 = 0 \Rightarrow t = 5$$

$f''(t) = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$$f(5) = -25 + 50 = 25$$

Das Maximum liegt bei $t = 5$ mit $f(5) = 25$.

b) Deutung von f'(3)

$$f'(3) = -6 + 10 = 4$$

Die Änderungsrate der Produktion zum Zeitpunkt $t = 3$ beträgt 4 Einheiten pro Zeiteinheit. Die Produktion steigt noch.

A12) Bestimmtes Integral

$$\int_0^3 (2x + 1)\ dx = [x^2 + x]_0^3$$

$$= (9 + 3) - (0 + 0) = 12$$

A13) Exponentialwachstum

Gegeben: $f(t) = 200e^{0,2t}$

a) Verdopplungszeit
Verdopplungszeit T: $f(T) = 2 \cdot f(0)$

$$200e^{0,2T} = 400$$

$$e^{0,2T} = 2$$

$$0{,}2T = \ln(2)$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$T = \frac{\ln(2)}{0{,}2} \approx \frac{0{,}693}{0{,}2} \approx 3{,}47$$

Die Verdopplungszeit beträgt etwa 3,47 Einheiten.

b) Berechne f'(t)

$$f'(t) = 200 \cdot 0{,}2 \cdot e^{0{,}2t} = 40e^{0{,}2t}$$

A14) Kurvendiskussion

Diskutiere: $f(x) = x^2 - 3x$

Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}$$

Symmetrie
$f(-x) = x^2 + 3x \neq \pm f(x) \Rightarrow$ keine Symmetrie

Nullstellen

$$x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

Extrema

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} = -2{,}25$$

Tiefpunkt: $(1{,}5 \mid -2{,}25)$

Wendepunkte
$f''(x) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Keine Wendepunkte

Monotonie
$f'(x) < 0$ für $x < 1{,}5$: fallend

$f'(x) > 0$ für $x > 1{,}5$: steigend

A15) Sachkontext Integral

Zufluss: $f(t) = 5t$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de

$$\text{Wassermenge} = \int_0^4 5\,t\,dt = \left[\frac{5t^2}{2}\right]_0^4$$
$$= \frac{5 \cdot 16}{2} = 40$$

Die Wassermenge in den ersten 4 Minuten beträgt 40 Einheiten.

A16) Schnittpunkte

Gegeben: $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = 0{,}2$

$$e^{-x} = 0{,}2$$
$$-x = \ln(0{,}2)$$
$$x = -\ln(0{,}2) = \ln(5) \approx 1{,}609$$

Schnittpunkt: (ln(5) | 0,2) oder etwa (1,61 | 0,2)

A17) Symmetrie

Untersuche: $f(x) = x^5 - 3x$

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x) = -x^5 + 3x = -(x^5 - 3x) = -f(x)$$

Die Funktion ist ungerade (punktsymmetrisch zum Ursprung).

A18) Bestandsänderung

Gegeben: $f(t) = -2t + 8$

$$\text{Gesamtänderung} = \int_0^3 (-2t + 8)\ dt = [-t^2 + 8t]_0^3$$
$$= (-9 + 24) - 0 = 15$$

Die Gesamtänderung im Intervall [0,3] beträgt 15 Einheiten.

A19) Kombination

Gegeben: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

a) Extrempunkte

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5 \Rightarrow (1 \mid 5)$$

$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1 \Rightarrow (3 \mid 1)$$

b) Wendepunkt

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$$

Wendepunkt: $W(2 \mid 3)$

A20) Exponential + Fläche

Gegeben: $f(x) = 5 - 4e^{-0,6x}$

a) Asymptote

$$\lim_{x\to\infty}[5 - 4e^{-0,6x}] = 5$$

Waagrechte Asymptote: $y = 5$

b) Fläche im Intervall [0,2]

$$A = \int_0^2 (5 - 4e^{-0,6x})\,dx$$

$$= \left[5x + \frac{4}{0,6}e^{-0,6x}\right]_0^2$$

$$= \left[5x + \frac{20}{3}e^{-0,6x}\right]_0^2$$

$$A = 10 + \frac{20}{3}e^{-1,2} - \frac{20}{3}$$

Numerischer Wert:

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$A \approx 5{,}34$$

Damit ist die korrekte Fläche $A \approx 5{,}34$ Flächeneinheiten.

A21) Lineare Funktion und Integral

Gegeben: $f(x) = -3x + 12$

a) Nullstelle

$$-3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$$

b) Fläche zwischen Graph und x-Achse im Intervall [0,4]

$$A = \int_0^4 (-3x + 12)\ dx = \left[-\frac{3x^2}{2} + 12x\right]_0^4$$

$$= (-24 + 48) - 0 = 24$$

Die Fläche beträgt 24 Quadrateinheiten.

A22) Exponentialfunktion mit Parameter

Gegeben: $f_a(t) = ae^{-0{,}4t}$

a) Bestimme a so, dass f(0) = 50

$$f_a(0) = ae^0 = a = 50$$

Also $a = 50$

b) Halbwertszeit
Mit $a = 50$: $f(t) = 50e^{-0{,}4t}$

$$50e^{-0{,}4T} = 25$$

$$e^{-0{,}4T} = 0{,}5$$

$$T = \frac{\ln(2)}{0{,}4} \approx 1{,}733$$

A23) Wendepunkt und Krümmung

Gegeben: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

a) Wendestelle

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$$

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{64}{27} - \frac{64}{9} + \frac{8}{3} = \frac{64}{27} - \frac{192}{27} + \frac{72}{27} = -\frac{56}{27}$$

Wendestelle: $x = \frac{4}{3}$ oder $x \approx 1{,}33$

b) Krümmungsintervalle

$$f''(x) = 6x - 8$$

• $x < \frac{4}{3}$: $f''(x) < 0$ (Rechtskrümmung)

• $x > \frac{4}{3}$: $f''(x) > 0$ (Linkskrümmung)

A24) Tangente in einem Sachkontext

Funktion: $f(t) = -0{,}5t^2 + 4t$ (Höhe eines Balles)

a) Zeitpunkt der maximalen Höhe

$$f'(t) = -t + 4 = 0 \Rightarrow t = 4$$

Der Zeitpunkt der maximalen Höhe ist $t = 4$.

b) Tangente im Zeitpunkt t = 2
$f'(2) = -2 + 4 = 2$ (Steigung)

$$f(2) = -2 + 8 = 6$$

Tangente: $y - 6 = 2(t - 2) \Rightarrow y = 2t + 2$

Interpretation: Die Steigung von 2 bedeutet, dass die Höhe des Balles im Moment $t = 2$ mit einer Geschwindigkeit von 2 Einheiten pro Zeiteinheit zunimmt.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

A25) Fläche zwischen Graph und Gerade

Gegeben: $f(x) = x^2 - 4$ und $g(x) = 2x - 4$

a) Schnittpunkte

$$x^2 - 4 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

b) Eingeschlossene Fläche
Für $0 \leq x \leq 2$ liegt $g(x)$ über $f(x)$.

$$A = \int_0^2 [(2x-4) - (x^2-4)]\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\ dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$$