Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Geometrie - Lösungen

Abitur Basiskurs – Baden-Württemberg

G1) Gerade und Ebene

Gegeben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E: 2x + y - z = 5$$

a) Lagebeziehung
Setze Geradengleichung in Ebenengleichung ein:

$$2(1 + 2\lambda) + (-2 + \lambda) - (3 - \lambda) = 5$$

$$2 + 4\lambda - 2 + \lambda - 3 + \lambda = 5$$

$$6\lambda - 3 = 5$$

$$6\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt.

b) Schnittpunkt
Mit $\lambda = \frac{4}{3}$:

$$x = 1 + 2 \cdot \frac{4}{3} = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

$$y = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

Schnittpunkt: $S\left(\frac{11}{3} \,\middle|\, -\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{5}{3}\right)$

c) Schnittwinkel

Richtungsvektor g: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Normalenvektor E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}|}$$

$$|\vec{v}_g \cdot \vec{n}| = |4 + 1 + 1| = 6$$

$$|\vec{v}_g| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$$

Die Gerade steht senkrecht auf der Ebene.

d) Gerade in E orthogonal zu g
Eine Gerade in E, orthogonal zu g, muss:

1. In der Ebene E liegen
2. Orthogonal zu $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sein

Ein solcher Richtungsvektor ist z.B. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $S\left(\frac{11}{3} \,\middle|\, -\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{5}{3}\right)$ als Punkt:

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ -2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

G2) Dreieck im Raum

Gegeben: $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 2 \mid 0)$, $C(2 \mid 1 \mid 4)$

a) Zeige, dass ABC nicht rechtwinklig ist
Seitenvektoren:

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Prüfe Skalarprodukte:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 4 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 = -4 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 = 14 \neq 0$$

Keine Winkel sind 90°, daher nicht rechtwinklig.

b) Berechne Fläche

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{64 + 64 + 0} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$$

c) Ebenengleichung

Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oder vereinfacht: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mit Punkt $A(1 \mid 0 \mid 0)$:

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$E: 1(x-1) - 1(y-0) + 0(z-0) = 0$$

$E: x - y - 1 = 0$ oder $x - y = 1$

d) Abstand von D(0|0|2) zur Ebene
Formel: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1+1+0}}$$

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$

G3) Pyramide

Gegeben: $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(4 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 3 \mid 0)$, $S(0 \mid 0 \mid 6)$

Dies ist eine Pyramide mit rechteckiger Basis.

a) Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

Grundfläche ABC: Fläche $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$

Höhe $= 6$ (z-Koordinate von S)

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12$$

b) Höhe
Die Höhe der Pyramide ist der Abstand von S zur Ebene ABC.

Ebene ABC liegt in der xy-Ebene ($z = 0$).

Höhe $= 6$

c) Mantelfläche
Mantelfläche = Fläche der drei Seitenflächen (ABS, BCS, ACS)

Fläche ABS: $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(4 \mid 0 \mid 0)$, $S(0 \mid 0 \mid 6)$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}\right| = 24$

Fläche $ABS = 12$

Fläche ACS: $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 3 \mid 0)$, $S(0 \mid 0 \mid 6)$

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS}\right| = 18$

Fläche $ACS = 9$

Fläche BCS: $B(4 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 3 \mid 0)$, $S(0 \mid 0 \mid 6)$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right| = \sqrt{324 + 576 + 144} = \sqrt{1044} \approx 32{,}31$

Fläche $BCS \approx 16{,}16$

Mantelfläche $\approx 12 + 9 + 16{,}16 \approx 37{,}16$

d) Mittelpunkt von SC

$$M = \frac{1}{2} \cdot (S + C) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$M = (0 \mid 1{,}5 \mid 3)$$

G4) Lage zweier Ebenen

$$E_1: x + y + z = 3$$

$$E_2: 2x + 2y + 2z = 6$$

a) Lagebeziehung
E_2 ist das 2-fache von E_1:

$$2(x + y + z) = 2 \cdot 3$$

Die Ebenen sind identisch.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

b) Schnittgerade

Da $E_2 = 2 \cdot E_1$ gilt, sind die Ebenen identisch. Es gibt unendlich viele Schnittgeraden; jede Gerade in E_1 ist eine Schnittgerade. Eine moegliche Schnittgerade ist z. B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Abstand

Abstand $= 0$ (die Ebenen fallen zusammen)

G5) Abstand windschiefer Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Lagebeziehung

Ergebnis der Lageuntersuchung:

Die Geraden schneiden sich (sie sind nicht windschief).

Lösen des Gleichungssystems liefert:

$\lambda = 0, \mu = 1$

Schnittpunkt:

$$S = (1 \mid 2 \mid 0)$$

Probe:

$$g(0) = (1,2,0)$$

$$h(1) = (0 + 1,1 + 1,1 - 1) = (1,2,0)$$

Da ein Schnittpunkt existiert, ist der Abstand der Geraden:

$$d = 0$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

b) Abstand

$$d = \frac{\left|(\vec{P}_g - \vec{P}_h) \cdot (\vec{v}_g \times \vec{v}_h)\right|}{\left|\vec{v}_g \times \vec{v}_h\right|}$$

$$\vec{P}_g - \vec{P}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_g \times \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -(-2 - 1) \\ 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{P}_g - \vec{P}_h) \cdot (\vec{v}_g \times \vec{v}_h) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 = 0$$

$d = 0 \Rightarrow$ Die Geraden schneiden sich!

c) Schnittpunkt
Da die Geraden sich schneiden, ist der minimale Abstand 0. Schnittpunkt (aus a)): $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $S = (1{,}2{,}0)$. Punkte minimalen Abstands: S auf g und S auf h; $d_{\min} = 0$.

G6) Spiegelung

$$E: x - 2y + z = 4$$

$$P(2 \mid 1 \mid 0)$$

a) Lotfußpunkt

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lotgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen in Ebenengleichung:

$$(2 + t) - 2(1 - 2t) + (0 + t) = 4$$

$$2 + t - 2 + 4t + t = 4$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$6t = 4 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$L = \left(2 + \frac{2}{3},\ 1 - \frac{4}{3},\ 0 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

b) Spiegelpunkt

$$P' = 2L - P = 2\left(\frac{8}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) - (2{,}1{,}0)$$

$$P' = \left(\frac{16}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right) - (2{,}1{,}0)$$

$$P' = \left(\frac{16}{3} - 2,\ -\frac{2}{3} - 1,\ \frac{4}{3}\right)$$

$$P' = \left(\frac{10}{3},\ -\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

c) Nachweis Mittelsenkrechte
L ist der Mittelpunkt von PP':

$$M = \frac{P + P'}{2} = \left(\frac{2 + 10/3}{2},\ \frac{1 - 5/3}{2},\ \frac{0 + 4/3}{2}\right)$$

$M = \left(\frac{16/3}{2},\ \frac{-2/3}{2},\ \frac{4/3}{2}\right) = \left(\frac{8}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) = L$ ✓

G7) Winkelberechnung

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Winkel zwischen Vektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 2 + 3 - 2 = 3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \approx 0{,}327$$

$$\alpha \approx 70{,}9°$$

b) Orthogonalität

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ Die Vektoren sind nicht orthogonal.

c) Vektor orthogonal zu beiden

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 2+3 \\ -1-4 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ oder vereinfacht $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

G8) Ebene durch Punkt und Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(0 \mid 1 \mid 1)$$

a) Ebenengleichung in Parameterform
Punkt auf g: $Q = (1,0,2)$

Richtungsvektoren der Ebene: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = P - Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Koordinatenform

Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ -1 + 2 \\ 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mit $Q(1{,}0{,}2)$: $-2(x-1) + 1(y-0) + 3(z-2) = 0$

$$-2x + 2 + y + 3z - 6 = 0$$

$$E: -2x + y + 3z = 4$$

c) Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

G9) Rechteck im Raum

$A(1 \mid 1 \mid 0), B(4 \mid 1 \mid 0), C(4 \mid 3 \mid 2)$

a) Bestimme D
Für ein Parallelogramm $ABCD$: $D = A + C - B$

$$D = (1{,}1{,}0) + (4{,}3{,}2) - (4{,}1{,}0)$$

$$D = (1{,}3{,}2)$$

b) Fläche

$$\text{Fläche} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{0 + 36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Fläche} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

c) Ebenengleichung

Normalenvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $A(1,1,0)$: $0(x-1) - 1(y-1) + 1(z-0) = 0$

$E: -y + 1 + z = 0$ oder $-y + z = -1$ oder $y - z = 1$

G10) Würfel

$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 0 \mid 0)$, $D(0 \mid 3 \mid 0)$

a) Punkt C (Ecke des Würfels)
Für einen Würfel mit Seitenlänge 3:

$$C = (3,3,0)$$

b) Volumen des Würfels
Seitenlänge $s = 3$

$$V = s^3 = 3^3 = 27$$

c) Raumdiagonale von A bis zu gegenüberliegender Ecke
Gegenüberliegende Ecke: $E(0 \mid 0 \mid 3)$, $F(3 \mid 0 \mid 3)$, $G(3 \mid 3 \mid 3)$, $H(0 \mid 3 \mid 3)$

Raumdiagonale von $A(0 \mid 0 \mid 0)$ zu $G(3 \mid 3 \mid 3)$:

$$\text{Länge} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$$

G11) Lotfußpunkt

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P(3 \mid 0 \mid 1)$$

a) Lotfußpunkt von P auf g
Punkt auf g: $Q(\lambda) = (2 + \lambda,\ 1 - \lambda,\ 2\lambda)$

$$\overrightarrow{PQ} = (\lambda - 1,\ 1 - \lambda,\ 2\lambda - 1)$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Bedingung: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_g = 0$

$$(\lambda - 1,\ 1 - \lambda,\ 2\lambda - 1) \cdot (1, -1, 2) = 0$$

$$(\lambda - 1) - (1 - \lambda) + 2(2\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda - 1 - 1 + \lambda + 4\lambda - 2 = 0$$

$$6\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$$F = \left(2 + \frac{2}{3},\ 1 - \frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

b) Abstand von P zu g

$$d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$$

c) Ebene durch P orthogonal zu g
Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Mit $P(3,0,1)$:

$$E: 1(x - 3) - 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

$$E: x - y + 2z = 5$$

G12) Schnitt zweier Ebenen

$$E_1: x + 2y - z = 1$$

$$E_2: 2x - y + z = 4$$

a) Schnittgerade
Addiere E_1 und E_2: $3x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3x$

Aus E_1: $z = x + 2y - 1 = x + 2(5 - 3x) - 1 = x + 10 - 6x - 1 = 9 - 5x$

Schnittgerade: $\vec{x} = (x,\ 5 - 3x,\ 9 - 5x)$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Parametrisch: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Winkel zwischen Ebenen

Normalenvektoren: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 2 - 1 = -1$$

$|\vec{n}_1| = \sqrt{6}, |\vec{n}_2| = \sqrt{6}$

$$\cos(\alpha) = \frac{|-1|}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\alpha \approx 80{,}4°$$

c) Punkt auf Schnittgerade
Mit $t = 0$: $P = (0{,}5{,}9)$

G13) Parallelogramm

$A(1 \mid 0 \mid 0), B(3 \mid 1 \mid 2), C(2 \mid 2 \mid 1)$

a) Bestimme D
Für Parallelogramm $ABCD$: $D = A + C - B$

$$D = (1{,}0{,}0) + (2{,}2{,}1) - (3{,}1{,}2)$$

$$D = (0{,}1,-1)$$

b) Fläche ABCD

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$\text{Fläche} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$$

c) Ebenengleichung

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $A(1{,}0{,}0)$: $-1(x-1) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0$

$E: -x + 1 + z = 0$ oder $z = x - 1$

G14) Spurpunkte einer Ebene

$$E: 2x + 3y - z = 6$$

a) Spurpunkte
Spurpunkt auf x-Achse ($y = 0, z = 0$): $2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3{,}0{,}0)$

Spurpunkt auf y-Achse ($x = 0, z = 0$): $3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0{,}2{,}0)$

Spurpunkt auf z-Achse ($x = 0, y = 0$): $-z = 6 \Rightarrow z = -6 \Rightarrow (0{,}0,-6)$

b) Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Abstand vom Ursprung

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{4 + 9 + 1}}$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{7} \approx 1{,}603$$

d) Skizze qualitativ
Die Ebene schneidet die x-Achse bei $(3{,}0{,}0)$,

die y-Achse bei $(0{,}2{,}0)$ und

die z-Achse bei $(0{,}0,-6)$.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

G15) Abstand Punkt-Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$P(3 \mid 0 \mid 2)$$

a) Abstand von P zu g

Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$Q - P = (2\lambda - 2,\ 2 - \lambda,\ 1 + \lambda)$$

Orthogonalitätsbedingung:

$$(Q - P) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow 6\lambda - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$$

Lotfußpunkt:

$$F = \left(\frac{8}{3}, \frac{7}{6}, \frac{23}{6}\right)$$

Abstand:

$$d = \sqrt{\frac{29}{6}} \approx 2{,}20$$

b) Lotfußpunkt

$$F = \left(\frac{8}{3}, \frac{7}{6}, \frac{23}{6}\right)$$

c) Ebene durch P orthogonal zu g

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

Mit $P(3,0,2)$:

$$E\colon 2(x - 3) - 1(y - 0) + 1(z - 2) = 0$$

$$E\colon 2x - y + z = 8$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

G16) Schnitt Gerade-Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Lagebeziehung

Richtungsvektoren: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{v}_g$

Die Vektoren sind parallel!

b) Schnittpunkt oder Begründung
Prüfe, ob Punkte auf einer Linie liegen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda = 1$: (1,3,3) (Punkt auf g)

Mit $\mu = 0$: (1,3,3) (Punkt auf h)

Die Geraden sind identisch.

c) Winkel
Da die Geraden parallel/identisch sind: $\alpha = 0°$

G17) Ebene durch drei Punkte

$A(2 \mid 1 \mid 0), B(1 \mid 3 \mid 2), C(0 \mid 2 \mid 1)$

a) Ebenengleichung
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 2-2 \\ -4+1 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $A(2,1,0)$: $0(x-2) - 1(y-1) + 1(z-0) = 0$

$$E: -y + 1 + z = 0$$

b) Koordinatenform
$E: -y + z = -1$ oder $y - z = 1$

c) Abstand von D(1|1|1) zu E

$$d = \frac{|1 - 1 - (-1)|}{\sqrt{0+1+1}}$$

$$d = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$

G18) Winkel zwischen Gerade und Ebene

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: x - y + z = 2$$

a) Winkel zwischen g und E

Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 + 1 + 2 = 4$$

$|\vec{v}| = \sqrt{6}, |\vec{n}| = \sqrt{3}$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$\sin(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}943$$

$$\alpha \approx 70{,}5°$$

b) Schnittpunkt S

$$(1+\lambda) - (1-\lambda) + (0+2\lambda) = 2$$

$$1 + \lambda - 1 + \lambda + 2\lambda = 2$$

$$4\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{2},\ 0 + 1\right) = \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$$

c) Interpretation
Die Gerade durchstoßt die Ebene unter dem Winkel ca. 70,5°.

G19) Volumen eines Tetraeders

$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(2 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 3 \mid 0)$, $D(0 \mid 0 \mid 4)$

a) Volumen

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|$$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = 2 \cdot 12 = 24$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

b) Grundfläche ABC

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

c) Höhe

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot h$$

$$4 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot h$$

$$h = 4$$

G20) Projektion

$P(2 \mid 3 \mid 1), E: x + 2y + z = 5$

a) Lotfußpunkt L

Lotgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einsetzen: $(2 + t) + 2(3 + 2t) + (1 + t) = 5$

$$2 + t + 6 + 4t + 1 + t = 5$$

$$6t = -4 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

$$L = \left(2 - \frac{2}{3},\ 3 - \frac{4}{3},\ 1 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) Abstand von P zu E

$$d = \left|\overrightarrow{PL}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}633$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

c) Spiegelpunkt P'

$$P' = 2L - P = 2\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) - (2{,}3{,}1)$$

$$P' = \left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right) - (2{,}3{,}1)$$

$$P' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

G21) Orthogonalität von Ebenen

$$E_1: x + y - z = 3$$

$$E_2: 2x - y + 4z = 5$$

a) Winkel zwischen Ebenen

Normalenvektoren: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 - 4 = -3$$

$|\vec{n}_1| = \sqrt{3}, |\vec{n}_2| = \sqrt{21}$

$$\cos(\alpha) = \frac{|-3|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{63}} = \frac{3}{3\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\alpha \approx 67{,}8°$$

b) Schnittgerade
Löse das System:

$$x + y - z = 3$$

$$2x - y + 4z = 5$$

Richtungsvektor: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittgerade: Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Stuetzpunkt z. B. durch $z = 0$: $x + y = 3$ und $2x - y = 5 \Rightarrow x = \frac{8}{3}, y = \frac{1}{3}$.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Oder: Setze $z = 0$ in das Gleichungssystem:

(I) $x + y = 3$

(II) $2x - y = 5$

Addition: $3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

Einsetzen: $y = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$

Damit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Interpretation
Die Ebenen sind nicht orthogonal ($\cos(\alpha) \neq 0$).

G22) Parallele Ebenen

$$E: 3x - y + 2z = 4$$

$$P(1 \mid 2 \mid 3)$$

a) Parallele Ebene durch P
Parallele Ebenen haben gleiche Normalenvektoren.

$$E': 3x - y + 2z = d$$

Mit $P(1,2,3)$: $3(1) - 1(2) + 2(3) = 3 - 2 + 6 = 7$

$$E': 3x - y + 2z = 7$$

b) Abstand der Ebenen

$$d = \frac{|7 - 4|}{\sqrt{9 + 1 + 4}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14} \approx 1{,}134$$

c) Interpretation
Die Ebenen E und E' sind parallel und haben einen Abstand von ca. 1,134.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

G23) Rechteck - Flächenvergleich

$A(0 \mid 0 \mid 0), B(4 \mid 0 \mid 0), C(4 \mid 3 \mid 1)$

a) Fehlender Punkt D

$$D = A + C - B = (0{,}0{,}0) + (4{,}3{,}1) - (4{,}0{,}0)$$

$$D = (0{,}3{,}1)$$

b) Fläche von ABCD

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{0 + 16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$\text{Fläche} = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65$$

c) Flächendiagonalen

$$AC = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$$

$$BD = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$$

Die Diagonalen sind gleich lang (Eigenschaft des Rechtecks).

G24) Abstand zweier Ebenen

$$E_1: x + y + z = 4$$

$$E_2: x + y + z = 10$$

a) Lagebeziehung

Normalenvektoren sind identisch: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Ebenen sind parallel.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

b) Abstand

$$d = \frac{|10-4|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$$

c) Interpretation
Die parallelen Ebenen sind voneinander um ca. 3,464 Einheiten entfernt.

G25) Anwendungsaufgabe - Mast

Hang (Ebene E): $2x + y - z = 0$

Mast steht senkrecht auf dem Hang durch $P(3 \mid 1 \mid 2)$

a) Richtung des Mastes
Die Richtung senkrecht zum Hang ist der Normalenvektor der Ebene.

Mastrichtung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Oder normalisiert: $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Höhe bei Schnitt mit der z-Achse
Mastlinie: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x = 0$ und $y = 0$ gleichzeitig

Aus $x = 0$ folgt: $t = -\frac{3}{2}$

Aus $y = 0$ folgt: $t = -1$

Widerspruch ⇒ Kein Schnittpunkt mit der z-Achse.

c) Interpretation
Die Gerade schneidet die z-Achse nicht.