Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Geometrie

Vektorgeometrie

Grundlagen, Geraden, Ebenen und Lagebeziehungen

Teil I – Grundlagen

1 Punkte und Vektoren

Ein Punkt P im dreidimensionalen Raum wird durch drei Koordinaten beschrieben. Der Ortsvektor zeigt vom Ursprung O zum Punkt P.

Punkt:	$P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$
Ortsvektor:	$\overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, p_3)^T$
Verbindungsvektor:	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A$
Mittelpunkt:	$M = ½ \cdot (A + B)$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

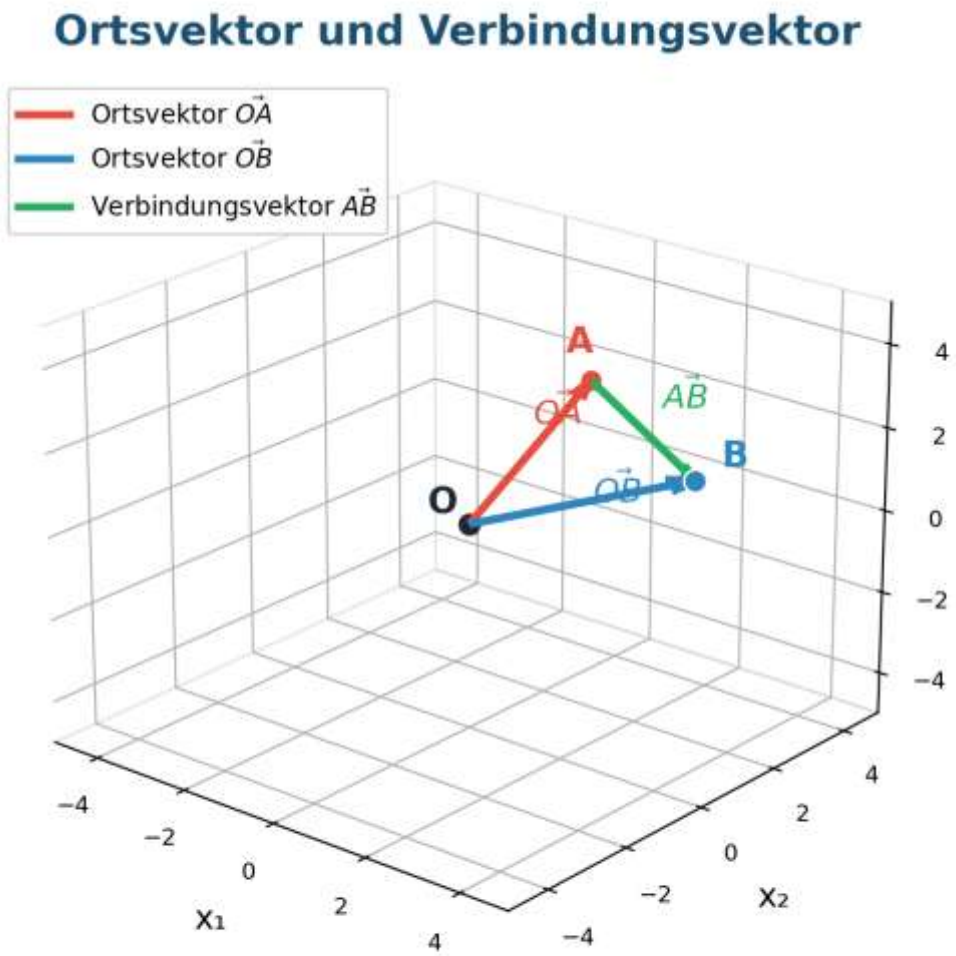

Abb. 1: Ortsvektor und Verbindungsvektor

2 Vektoroperationen

2.1 Addition und Subtraktion

Vektoren werden komponentenweise addiert bzw. subtrahiert:

Addition:	$\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)^T$

Subtraktion:	$\vec{a} - \vec{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)^T$

2.2 Skalare Multiplikation

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Skalar · Vektor:	$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2, k \cdot a_3)^T$

2.3 Länge (Betrag) eines Vektors

Betrag:	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$

Abstand P–Q:	$d(P,Q) = \lvert\vec{PQ}\rvert = \sqrt{((q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + (q_3-p_3)^2)}$

2.4 Skalarprodukt

Skalarprodukt:	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Winkelformel:	$\cos(\alpha) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) / (\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert)$

Orthogonalität:	$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

ℹ Merke:
Das Skalarprodukt liefert eine Zahl (Skalar), keinen Vektor. Es wird benötigt für: Winkelberechnung, Orthogonalitätsprüfung und Abstandsberechnungen.

2.5 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Kreuzprodukt:	$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)^T$

Eigenschaften:	$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

Fläche Parallelogramm:	$A = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$

ℹ Anwendung:
Das Kreuzprodukt liefert einen Normalenvektor der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Es wird benötigt für: Normalenvektor bestimmen, Flächenberechnung, Umwandlung Parameterform → Koordinatenform.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

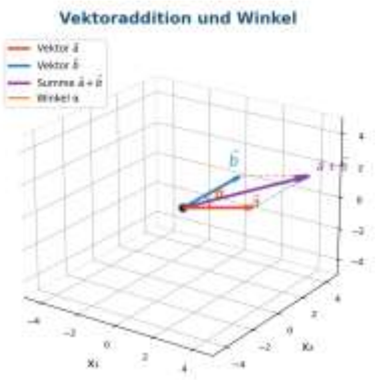

Abb. 2: Vektoraddition und Winkel zwischen Vektoren

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Teil II – Geraden

3 Geradengleichung in Parameterform

Eine Gerade im Raum wird durch einen Stützvektor (Punkt auf der Geraden) und einen Richtungsvektor beschrieben.

Parameterform:	$g: \vec{X} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\vec{p}$ = Ortsvektor des Stützpunktes P

$\vec{u}$ = Richtungsvektor der Geraden

t = Parameter (durchläuft alle reellen Zahlen)

3.1 Aufstellen einer Geradengleichung

Gegeben: Zwei Punkte A und B auf der Geraden.

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{u} = \vec{AB} = B - A$$
$$\text{Geradengleichung: } g: \vec{X} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB}$$

Beispiel: A(1|0|2), B(3|1|4)

$$\vec{u} = B - A = (2, 1, 2)^T$$
$$g: \vec{X} = (1, 0, 2)^T + t \cdot (2, 1, 2)^T$$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

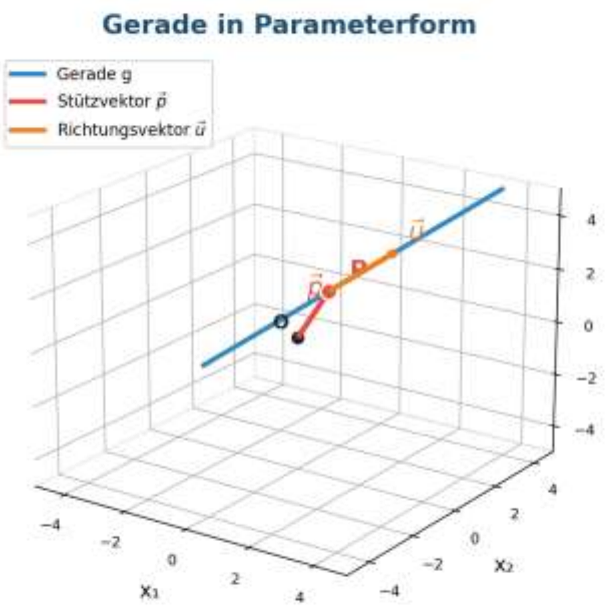

Abb. 3: Gerade in Parameterform mit Stütz- und Richtungsvektor

3.2 Spurpunkte einer Geraden

Spurpunkte sind die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen.

Spurpunkt S_{12} (x_3=0):	Setze 3. Komponente = 0, löse nach t
Spurpunkt S_{13} (x_2=0):	Setze 2. Komponente = 0, löse nach t
Spurpunkt S_{23} (x_1=0):	Setze 1. Komponente = 0, löse nach t

4 Gegenseitige Lage zweier Geraden

Zwei Geraden g und h im Raum können in vier verschiedenen Lagebeziehungen zueinander stehen:

Lage	Richtungsvektoren	LGS
Identisch	Vielfache ($\vec{u} = k \cdot \vec{v}$)	Alle t erfüllen LGS
Parallel	Vielfache ($\vec{u} = k \cdot \vec{v}$)	Kein t erfüllt LGS

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Schnitt	Nicht Vielfache	Genau eine Lösung
Windschief	Nicht Vielfache	Widerspruch in 3. Gleichung

Vorgehensweise:

- Richtungsvektoren vergleichen: Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vielfache?
- Falls ja: Punkt von g in h einsetzen → identisch oder parallel.
- Falls nein: LGS aufstellen (g = h) und lösen → Schnitt oder windschief.

> **⚠ Windschief:**
> Zwei Geraden heißen windschief, wenn sie sich weder schneiden noch parallel sind. Dies ist nur im dreidimensionalen Raum möglich!

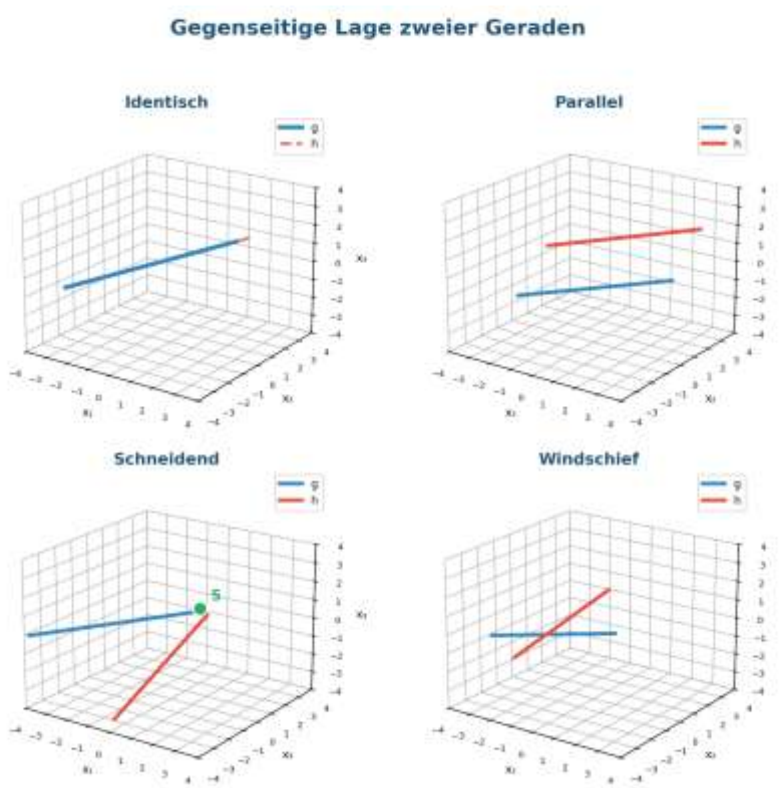

Abb. 4: Die vier Fälle der gegenseitigen Lage zweier Geraden

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Teil III – Ebenen

5 Ebenengleichungen

5.1 Parameterform

Parameterform:	$E: \vec{X} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \quad (s, t \in \mathbb{R})$

$\vec{p}$ = Ortsvektor des Stützpunktes

$\vec{u}$, $\vec{v}$ = Spannvektoren (nicht parallel, d.h. linear unabhängig)

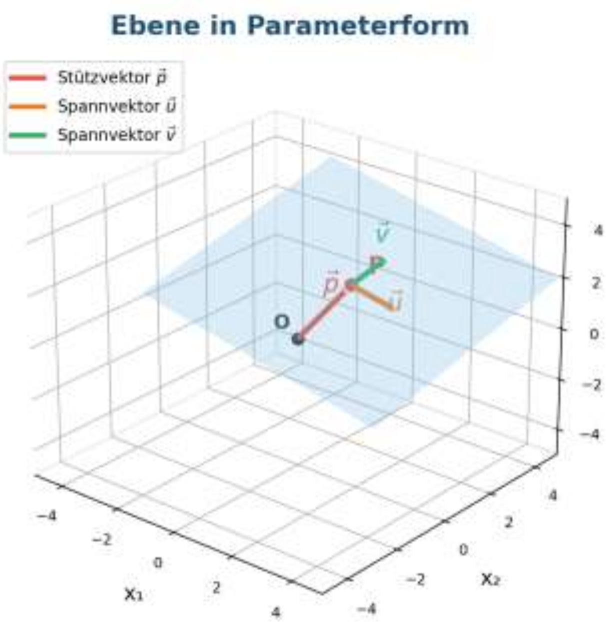

Abb. 5: Ebene in Parameterform mit Stützpunkt und Spannvektoren

5.2 Koordinatenform (Normalenform)

Koordinatenform:	$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

Mit Normalenvektor:	$E: \vec{n} \cdot (\vec{X} - \vec{p}) = 0$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ = Normalenvektor, steht senkrecht auf der Ebene

$d = \vec{n} \cdot \vec{p}$ = Abstandsparameter

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

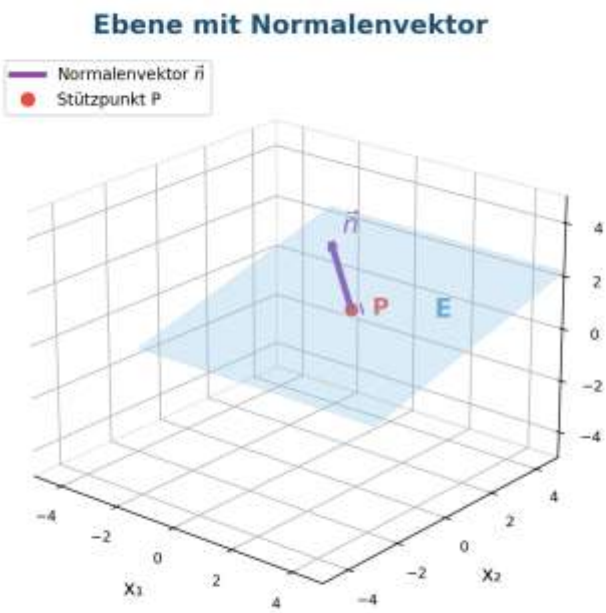

Abb. 6: Ebene mit Normalenvektor

5.3 Umwandlung der Ebenenformen

Parameterform → Koordinatenform:

- Normalenvektor berechnen: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Kreuzprodukt der Spannvektoren).
- d berechnen: $d = \vec{n} \cdot \vec{p}$ (Stützpunkt einsetzen).
- Koordinatenform aufschreiben: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$.

Koordinatenform → Parameterform:

- Drei Punkte auf der Ebene bestimmen (z.B. Spurpunkte).
- Stützvektor und zwei Spannvektoren bilden.

5.4 Spurpunkte und Spurgeraden

Spurpunkte einer Ebene sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Spurgeraden sind die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen.

Spurpunkt S_1 (x_2=x_3=0):	$x_1 = d / n_1$

Spurpunkt S_2 (x_1=x_3=0):	$x_2 = d / n_2$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Spurpunkt S_3 (x_1=x_2=0):	$x_3 = d\ /\ n_3$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Teil IV – Lagebeziehungen und Abstände

6 Lage: Gerade – Ebene

Eine Gerade g und eine Ebene E können drei verschiedene Lagebeziehungen haben:

Lage	Bedingung	Vorgehen
Schnitt	g nicht parallel zu E	LGS lösen → Schnittpunkt S
Parallel	$g \parallel E$, g nicht in E	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, Punkt nicht in E
g liegt in E	$g \subset E$	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, Punkt liegt in E

Vorgehensweise: Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen.

- Genau eine Lösung für t → Schnittpunkt (t einsetzen).
- Kein t → 0 = Zahl ≠ 0 → parallel.
- Alle t → 0 = 0 → Gerade liegt in der Ebene.

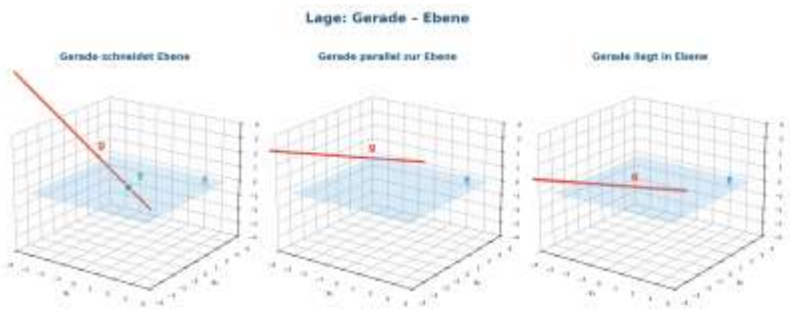

Abb. 7: Drei Fälle der Lage Gerade–Ebene

7 Lage: Ebene – Ebene

Zwei Ebenen E_1 und E_2 können drei verschiedene Lagebeziehungen haben:

Lage	Normalenvektoren	Gleichungssystem
Schnittgerade	Nicht Vielfache	Lösung mit einem Parameter
Parallel	Vielfache ($\vec{n}_1=k\cdot\vec{n}_2$)	Widerspruch ($d_1 \neq k\cdot d_2$)
Identisch	Vielfache ($\vec{n}_1=k\cdot\vec{n}_2$)	$d_1 = k\cdot d_2$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

ℹ Schnittgerade bestimmen:
Gleichungssystem aus beiden Koordinatenformen aufstellen. Eine Variable frei wählen (Parameter t) und die anderen beiden ausdrücken → Parameterform der Schnittgeraden.

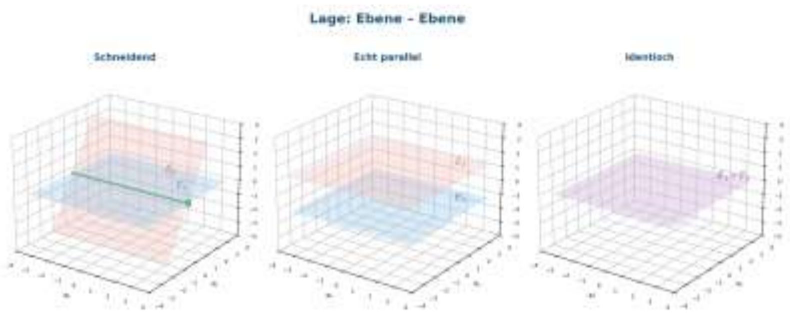

Abb. 8: Drei Fälle der Lage Ebene–Ebene

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

8 Schnittwinkel

8.1 Winkel zwischen zwei Geraden

Formel:	$\cos(\alpha) = \lvert\vec{u} \cdot \vec{v}\rvert \,/\, (\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert)$

ℹ Betrag:
Durch den Betrag im Zähler ergibt sich stets ein spitzer Winkel (0° ≤ α ≤ 90°).

8.2 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Formel:	$\sin(\alpha) = \lvert\vec{u} \cdot \vec{n}\rvert \,/\, (\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert)$

Beachte: Hier steht sin statt cos, da der Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene das Komplement zum Winkel zwischen Gerade und Normalenvektor ist.

8.3 Winkel zwischen zwei Ebenen

Formel:	$\cos(\alpha) = \lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert \,/\, (\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert)$

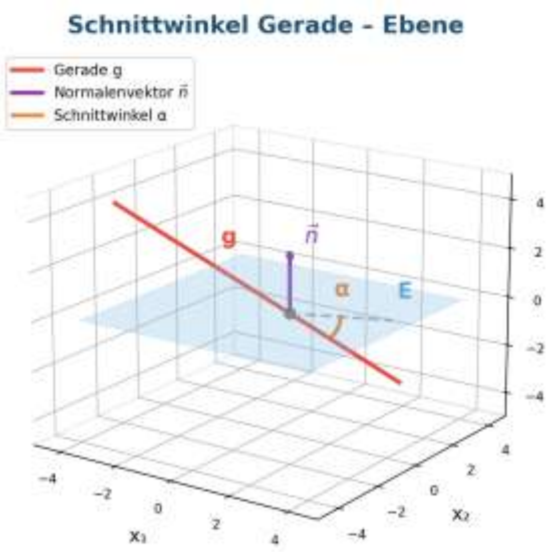

Abb. 9: Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

9 Abstandsberechnungen

9.1 Abstand Punkt – Ebene

Die Hessesche Normalform ermöglicht die direkte Berechnung des Abstands eines Punktes Q von einer Ebene E:

Abstandsformel:	$d(Q, E) = \lvert n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3 - d\rvert \, / \, \lvert\vec{n}\rvert$

Beispiel: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$, Q(3|1|0)

$$d = \lvert 2\cdot3 + 1\cdot1 + 2\cdot0 - 6\rvert \, / \, \sqrt{(4+1+4)}$$
$$d = \lvert 6 + 1 + 0 - 6\rvert \, / \, \sqrt{9} = \lvert 1\rvert \, / \, 3 = 1/3$$

9.2 Abstand Punkt – Gerade

Der Abstand eines Punktes Q von einer Geraden g wird über das Lot berechnet:

Methode 1 (Kreuzprodukt):	$d(Q, g) = \lvert\vec{PQ} \times \vec{u}\rvert \, / \, \lvert\vec{u}\rvert$

Methode 2 (Lotfußpunkt):	Lotfußpunkt F: $\vec{QF} \cdot \vec{u} = 0$

9.3 Abstand paralleler Geraden / Ebenen

Für den Abstand paralleler Objekte: einen beliebigen Punkt des einen Objekts nehmen und den Abstand zum anderen berechnen.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

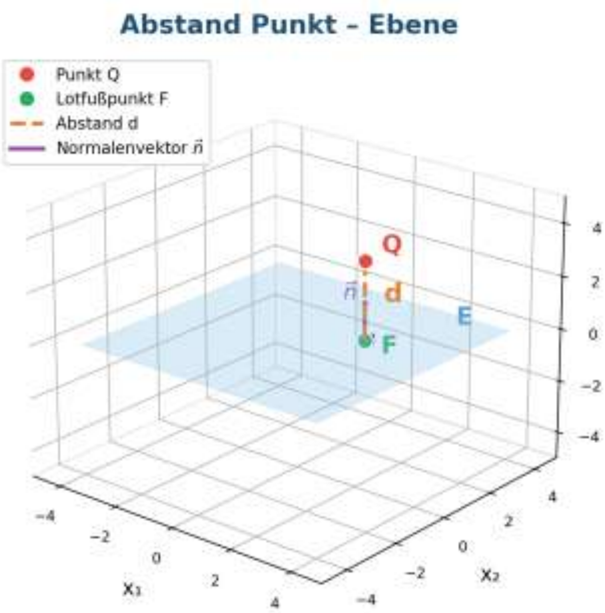

Abb. 10: Abstand eines Punktes von einer Ebene (Lotfußpunkt F)

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

10 Spiegelungen

Bei Spiegelungen wird ein Punkt (oder eine Gerade) an einer Ebene gespiegelt. Der Spiegelpunkt P′ liegt auf der gegenüberliegenden Seite der Ebene, im gleichen Abstand.

10.1 Punkt an Ebene spiegeln

Vorgehensweise in 3 Schritten:

- Schritt 1: Lotgerade durch P aufstellen: l: $\vec{X} = \vec{OP} + t \cdot \vec{n}$.
- Schritt 2: Lotfußpunkt F bestimmen (Lotgerade in Ebene einsetzen, t berechnen).
- Schritt 3: Spiegelpunkt berechnen: P′ = 2F – P.

Spiegelpunkt:	$P' = P + 2t_0 \cdot \vec{n}$

Dabei ist t_0 der Parameterwert des Lotfußpunktes: $t_0 = (d - \vec{n} \cdot \vec{OP}) / |\vec{n}|^2$

10.2 Punkt an Gerade spiegeln

Analog: Lotfußpunkt F auf der Geraden bestimmen ($\vec{QF} \perp \vec{u}$), dann P′ = 2F – P.

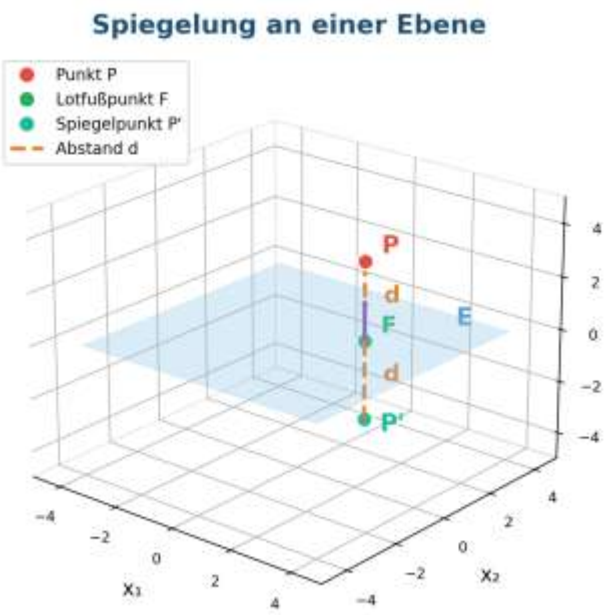

Abb. 11: Spiegelung eines Punktes P an einer Ebene E → Spiegelpunkt P′

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Formelübersicht

Thema	Formel
Betrag	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
Kreuzprodukt	$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$
Gerade	$g: \vec{X} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$
Ebene (Param.)	$E: \vec{X} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$
Ebene (Koord.)	$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$
Winkel (Geraden)	$\cos(\alpha) = \lvert\vec{u} \cdot \vec{v}\rvert / (\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert)$
Winkel (g–E)	$\sin(\alpha) = \lvert\vec{u} \cdot \vec{n}\rvert / (\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert)$
Abstand (P–E)	$d = \lvert n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3 - d\rvert / \lvert\vec{n}\rvert$
Spiegelpunkt	$P' = P + 2t_0 \cdot \vec{n}$