

# Kombinatorik

Herleitungen und Zusammenhänge der Formeln

*Ergänzungsmaterial zur Stochastik-Formelsammlung*

## 0 Grundidee: Das Stufenprinzip (Produktregel)

Der Schlüssel zu allen vier Kombinatorik-Formeln ist das Zählprinzip: Wenn man eine Auswahl in mehreren aufeinanderfolgenden Schritten trifft, multipliziert man die Anzahl der Möglichkeiten pro Schritt.

Das ist dasselbe Prinzip wie beim Baumdiagramm – jede Verzweigung multipliziert die Pfadanzahl.

★ **Kernidee:** Hat man in Schritt 1 genau a Möglichkeiten und in Schritt 2 genau b Möglichkeiten, so gibt es insgesamt  $a \cdot b$  Möglichkeiten. Allgemein für k Schritte: Gesamtanzahl = Produkt aller Einzelmöglichkeiten.

### Übersichtstabelle

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Reihenfolge wichtig (Variationen)	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Reihenfolge egal (Kombinationen)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Sonderfall: Permutation ( $k = n$ , ohne Z.)	$n!$	

$n$  = Anzahl der Elemente,  $k$  = Anzahl der Ziehungen.

### Fall 1: Variation mit Zurücklegen

*Reihenfolge wichtig, mit Zurücklegen*

Dies ist der einfachste Fall und der Ausgangspunkt für alle weiteren Herleitungen. Man hat  $n$  Elemente und zieht  $k$ -mal, wobei nach jedem Zug zurückgelegt wird. In jedem der  $k$  Schritte stehen alle  $n$  Elemente zur Verfügung.

#### Herleitung

Nach dem Stufenprinzip ergibt sich:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k$$

Jeder der  $k$  Schritte bietet  $n$  Wahlmöglichkeiten, und die Schritte sind voneinander unabhängig – daher einfach  $n$  mit sich selbst  $k$ -mal multipliziert.

**Variation mit Zurücklegen:**  $V_{mZ} = n^k$

## Beispiel: PIN-Code

• **Beispiel:** Ein 4-stelliger PIN besteht aus den Ziffern 0–9. Jede Stelle kann unabhängig jede Ziffer annehmen (Zurücklegen, Reihenfolge zählt).

$$n = 10, \quad k = 4: \quad 10^4 = 10.000 \text{ Möglichkeiten}$$

## Fall 2: Variation ohne Zurücklegen

*Reihenfolge wichtig, ohne Zurücklegen*

Jetzt wird nicht zurückgelegt. Im ersten Schritt stehen  $n$  Elemente zur Verfügung, im zweiten nur noch  $n - 1$ , im dritten  $n - 2$ , und so weiter bis zum  $k$ -ten Schritt mit  $n - k + 1$  Elementen.

### Herleitung

Nach dem Stufenprinzip ergibt sich ein fallendes Produkt:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Den Zusammenhang zur Fakultät sieht man durch geschicktes Erweitern. Man schreibt  $n!$  vollständig aus:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Teilt man durch  $(n - k)!$ , so kürzen sich genau die Faktoren  $(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  weg – es bleiben genau die oberen  $k$  Faktoren übrig:

$$\frac{n!}{(n - k)!} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

**Variation ohne Zurücklegen:**  $V_{oZ} = \frac{n!}{(n - k)!}$

↔ **Zusammenhang:** Verbindung zu Fall 1: Bei Fall 1 sind alle  $k$  Faktoren gleich  $n$ . Hier werden sie sukzessive kleiner, weil Elemente verbraucht werden. Im Baumdiagramm nimmt die Verzweigungsbreite mit jeder Stufe um 1 ab.

## Beispiel: Podestplätze

• **Beispiel:** Bei einem Rennen mit 8 Teilnehmern: Wie viele Möglichkeiten gibt es für Gold, Silber, Bronze? Die Reihenfolge zählt, kein Zurücklegen.

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

### Sonderfall: Permutation (k = n)

Werden alle n Elemente angeordnet, ist k = n. Dann vereinfacht sich die Formel:

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

**! Merke:** Die Permutation ist kein eigenständiger Fall, sondern ergibt sich direkt aus der Variation ohne Zurücklegen mit k = n. Dabei nutzt man die Konvention 0! = 1.

☛ **Beispiel:** Auf wie viele Arten können 5 Bücher in einem Regal angeordnet werden?  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

### Sonderfall: Permutation mit Wiederholung

Was passiert, wenn man alle n Objekte anordnen will, aber einige davon identisch sind? Dann sind nicht alle n! Anordnungen unterscheidbar. Man muss die Formel anpassen.

### Herleitung

★ **Kernidee:** Man startet mit den n! Anordnungen aus der normalen Permutation. Da identische Objekte beim Vertauschen keine neue Anordnung erzeugen, hat man zu viel gezählt – genau wie beim Übergang von Fall 2 zu Fall 3.

Es gibt m Gruppen identischer Objekte mit den Gruppengrößen  $k_1, k_2, \dots, k_m$  (wobei  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ). Würde man die identischen Objekte innerhalb einer Gruppe gedanklich unterscheidbar machen (z. B. durch Nummerierung), hätte man n! Anordnungen. Aber die  $k_1$  Objekte der ersten Gruppe lassen sich untereinander auf  $k_1!$  Arten vertauschen, ohne eine neue Anordnung zu erzeugen – ebenso die  $k_2!$  der zweiten Gruppe usw. Da die Gruppen unabhängig voneinander vertauscht werden können, ergibt sich nach dem Stufenprinzip:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

**Permutation mit Wiederholung:**  $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$

↔ **Zusammenhang:** Verbindung zur normalen Permutation: Sind alle Objekte verschieden (also alle  $k_i = 1$ ), wird der Nenner zu  $1! \cdot 1! \cdot \dots \cdot 1! = 1$  und die Formel reduziert sich auf  $n!$  – die gewöhnliche Permutation.

☛ **Beispiel:** Wie viele unterscheidbare Anordnungen hat das Wort ANANAS? Es hat  $n = 6$  Buchstaben mit den Gruppen: A erscheint 3-mal, N erscheint 2-mal, S erscheint 1-mal.  $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 60$

### Fall 3: Kombination ohne Zurücklegen

*Reihenfolge egal, ohne Zurücklegen – der Binomialkoeffizient*

Dies ist der berühmte Binomialkoeffizient, und seine Herleitung baut direkt auf Fall 2 auf.

#### Herleitung

★ **Kernidee:** Die Kernfrage lautet: Um wie viel haben wir in Fall 2 zu viel gezählt?

Wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt, dann sind z. B. die Ziehungen  $\{A, B, C\}$  und  $\{C, A, B\}$  und  $\{B, C, A\}$  usw. alle dasselbe Ergebnis – in Fall 2 haben wir sie aber als verschieden gezählt.

Wie viele solcher Anordnungen gibt es für jede  $k$ -elementige Teilmenge? Genau  $k!$  – denn  $k$  Elemente lassen sich auf  $k!$  Arten permutieren (das ist der Sonderfall der Permutation aus Fall 2).

Also muss man die Anzahl aus Fall 2 durch  $k!$  teilen:

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

**Kombination ohne Zurücklegen:**  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

#### Die Schlüsselbeziehung

Man kann die Beziehung zwischen Fall 2 und Fall 3 auch so schreiben:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

**In Worten:** Variation ohne Zurücklegen = Kombination  $\times$  Anzahl der Anordnungen

↔ **Zusammenhang:** Jede ungeordnete Auswahl (Kombination) erzeugt genau  $k!$  geordnete Auswahlen (Variationen). Daher der Faktor  $k!$  im Nenner des Binomialkoeffizienten.

### Beispiel: Lottozahlen

☛ **Beispiel:** Beim Lotto 6 aus 49 wählt man 6 Zahlen, die Reihenfolge ist egal, kein Zurücklegen.

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

### Fall 4: Kombination mit Zurücklegen

*Reihenfolge egal, mit Zurücklegen – das Sterne-und-Balken-Argument*

Dies ist der unintuitivste Fall. Man will  $k$  Objekte aus  $n$  Sorten auswählen, wobei Wiederholungen erlaubt sind und die Reihenfolge keine Rolle spielt. Die Herleitung gelingt über eine geschickte Umcodierung.

### Herleitung: Stars and Bars

★ **Kernidee:** Statt die Objekte direkt zu zählen, codiert man die Auswahl um: Man stellt sich  $n$  Fächer vor (eines pro Sorte) und  $k$  Sterne, die auf die Fächer verteilt werden. Zwischen den Fächern stehen  $n - 1$  Trennbalken.

Eine Anordnung von  $k$  Sternen und  $n - 1$  Balken beschreibt eindeutig eine Auswahl. Insgesamt hat man  $k + (n - 1) = n + k - 1$  Positionen, von denen  $k$  für Sterne (oder äquivalent  $n - 1$  für Balken) gewählt werden.

### Beispiel: 3 Sorten, 4 Ziehungen

Codierung	Bedeutung	Auswahl
★★   ★   ★	2× Sorte 1, 1× Sorte 2, 1× Sorte 3	(2, 1, 1)
★★★   ★	0× Sorte 1, 3× Sorte 2, 1× Sorte 3	(0, 3, 1)
★★★★	4× Sorte 1, 0× Sorte 2, 0× Sorte 3	(4, 0, 0)

Die Frage lautet nun: Auf wie viele Arten kann man aus  $n + k - 1$  Positionen genau  $k$  auswählen? Das ist per Definition der Binomialkoeffizient:

$$\binom{n + k - 1}{k}$$

**Kombination mit Zurücklegen:**  $C_{mZ} = \binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k! \cdot (n - 1)!}$

↔ **Zusammenhang:** Verbindung zu Fall 3: In Fall 3 wählt man  $k$  aus  $n$  Elementen – der Binomialkoeffizient  $C(n, k)$ . In Fall 4 wird das Problem durch den Sterne-und-Balken-Trick so umcodiert, dass man es auf denselben Binomialkoeffizienten zurückführen kann, nur mit  $n + k - 1$  statt  $n$ .

## Zahlenbeispiel

■ **Beispiel:** Eine Eisdiele hat  $n = 5$  Sorten. Man möchte  $k = 3$  Kugeln wählen (Doppelt erlaubt, Reihenfolge egal).

$$\binom{5 + 3 - 1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

## Zusammenfassung der Zusammenhänge

Die vier Fälle sind keine isolierten Formeln, sondern bilden ein zusammenhängendes System. Hier die zentralen Verbindungen:

### Ableitungskette

**Fall 1 → Fall 2:** Zurücklegen entfernen. Statt  $k$  identischer Faktoren  $n$  entstehen  $k$  fallende Faktoren  $n, (n-1), (n-2), \dots$  – weil Elemente verbraucht werden.

**Fall 2 → Fall 3:** Reihenfolge ignorieren. Division durch  $k!$ , weil jede  $k$ -elementige Teilmenge in Fall 2 genau  $k!$ -mal (als verschiedene Anordnungen) gezählt wurde.

**Fall 3 → Fall 4:** Zurücklegen hinzufügen. Durch das Sterne-und-Balken-Argument wird das Problem auf einen Binomialkoeffizienten mit verschobenem Parameter  $n + k - 1$  zurückgeführt.

**Permutation:** Spezialfall von Fall 2 mit  $k = n$ . Keine neue Formel, sondern  $n!/(n-n)! = n!/0! = n!$ .

### Faustregeln:

Zurücklegen	Möglichkeiten werden mehr (größerer Lösungsraum)
Reihenfolge ignorieren	Möglichkeiten werden weniger (Division durch $k!$ )
Zurücklegen + Reihenfolge egal	Sterne-und-Balken-Trick → $C(n+k-1, k)$

## Beziehung als Formelkette

Die zentrale Identität, die Fall 2 und Fall 3 verbindet:

$$\text{Variation} = \text{Kombination} \times \text{Permutation}$$

$$\frac{n!}{(n - k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Oder äquivalent umgestellt nach dem Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{\text{Variation ohne Zurücklegen}}{\text{Anzahl der Anordnungen}} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**! Merke:** Diese Beziehung ist der Kern der Kombinatorik: Der Binomialkoeffizient zählt, wie viele ungeordnete Teilmengen es gibt, indem er die Anzahl geordneter Auswahlen durch die Anzahl möglicher Anordnungen teilt.