Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Stochastik

Formelsammlung und Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Binomialverteilung und Normalverteilung

Teil I – Grundlagen

1 Baumdiagramm

Das Baumdiagramm ist ein grafisches Hilfsmittel zur Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimente. An den Verzweigungen werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse notiert.

1.1 Pfadmultiplikation

Die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses entlang eines Pfades ergibt sich durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten:

Pfadmultiplikation:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$

Die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades werden miteinander multipliziert.

1.2 Pfadaddition

Besteht ein Ereignis aus mehreren Pfaden, werden deren Wahrscheinlichkeiten addiert:

Pfadaddition:	$P(E) = P(\text{Pfad}_1) + P(\text{Pfad}_2) + \ldots + P(\text{Pfad}_n)$

Die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade, die zum gleichen Ereignis führen, werden addiert.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

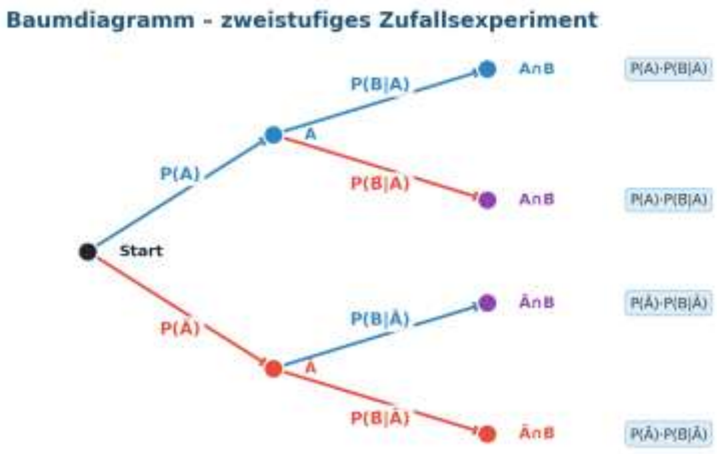

Abb. 1: Baumdiagramm – zweistufiges Zufallsexperiment

1.3 Mit/ohne Zurücklegen

Bei Zufallsexperimenten unterscheidet man, ob gezogene Elemente zurückgelegt werden oder nicht:

Mit Zurücklegen:	P bleibt in jeder Stufe gleich
Ohne Zurücklegen:	P ändert sich (Grundgesamtheit verkleinert sich)

Beispiel ohne Zurücklegen: P(2. Kugel rot) = (r−1)/(n−1), falls 1. Kugel rot war.

1.4 Mit/ohne Beachtung der Reihenfolge

Die Anzahl möglicher Ergebnisse hängt davon ab, ob die Reihenfolge eine Rolle spielt:

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	n^k	$n! / (n-k)!$
Ohne Reihenfolge	$(n+k-1)! / (k! \cdot (n-1)!)$	$n! / (k! \cdot (n-k)!) = C(n,k)$

n = Anzahl der Elemente, k = Anzahl der Ziehungen.

1.5 Gegenereignis

Das Gegenereignis Ā („nicht A") umfasst alle Ergebnisse, die nicht zu A gehören:

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Gegenereignis:	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

✓ Tipp:
Besonders nützlich bei „mindestens einmal"-Aufgaben:
P(mindestens 1) = 1 − P(keinmal)

2 Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswert und Standardabweichung sind zentrale Kenngrößen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

2.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert gibt den durchschnittlich zu erwartenden Wert eines Zufallsexperiments an:

Allgemein:	$\mu = E(X) = \Sigma\, x_i \cdot P(X = x_i)$
Ausgeschrieben:	$E(X) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \ldots + x_n \cdot P(x_n)$

μ = Erwartungswert, x_i = mögliche Werte, $P(X = x_i)$ = zugehörige Wahrscheinlichkeiten.

2.2 Varianz

Die Varianz misst die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

Varianz:	$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \Sigma\, (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$

2.3 Standardabweichung

Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz und gibt die Streuung in der Originaleinheit an:

Standardabweichung:	$\sigma = \sqrt{(\mathrm{Var}(X))} = \sqrt{(\Sigma\, (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i))}$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Teil II – Bedingte Wahrscheinlichkeit

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich ein Ereignis A ist, wenn bekannt ist, dass Ereignis B bereits eingetreten ist:

Bedingte W.keit:	$P(A\|B) = P(A \cap B) \mathbin{/} P(B)$

P(A|B) = Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

3.1 Satz von Bayes

Der Satz von Bayes ermöglicht es, bedingte Wahrscheinlichkeiten „umzukehren":

Satz von Bayes:	$P(A\|B) = P(B\|A) \cdot P(A) \mathbin{/} P(B)$

3.2 Totale Wahrscheinlichkeit

Die totale Wahrscheinlichkeit berechnet P(B) über alle möglichen Bedingungen:

Totale W.keit:	$P(B) = P(B\|A) \cdot P(A) + P(B\|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$

ℹ Merke:
Die totale Wahrscheinlichkeit wird häufig als Zwischenschritt beim Satz von Bayes benötigt, um den Nenner P(B) zu berechnen.

4 Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn das Eintreten des einen Ereignisses keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des anderen hat:

Unabhängigkeit:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Gleichbedeutend: P(A|B) = P(A) und P(B|A) = P(B).

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

5 Vierfeldertafel

Die Vierfeldertafel stellt die gemeinsame Verteilung zweier Ereignisse übersichtlich dar:

	B	$\bar{B}$ (nicht B)	Summe
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$ (nicht A)	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Summe	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Die Summen der Zeilen und Spalten ergeben die Randwahrscheinlichkeiten.

Vierfeldertafel

	B	B	Σ
A	P(A∩B)	P(A∩B)	P(A)
Ā	P(Ā∩B)	P(Ā∩B)	P(Ā)
Σ	P(B)	P(B)	1

Abb. 2: Vierfeldertafel – schematische Darstellung

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Teil III – Binomialverteilung

6 Bernoulliexperiment und Binomialverteilung

Ein Bernoulliexperiment ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ergebnissen: Treffer (Erfolg) mit Wahrscheinlichkeit p und Niete (Misserfolg) mit Wahrscheinlichkeit q = 1 − p.

6.1 Bernoulliformel (Binomialverteilung)

Die Wahrscheinlichkeit, bei n unabhängigen Versuchen genau k Treffer zu erzielen:

Bernoulliformel:	$P(X = k) = C(n,k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
Binomialkoeffizient:	$C(n,k) = n! \,/\, (k! \cdot (n-k)!)$

n = Anzahl der Versuche, k = Anzahl der Treffer, p = Trefferwahrscheinlichkeit.

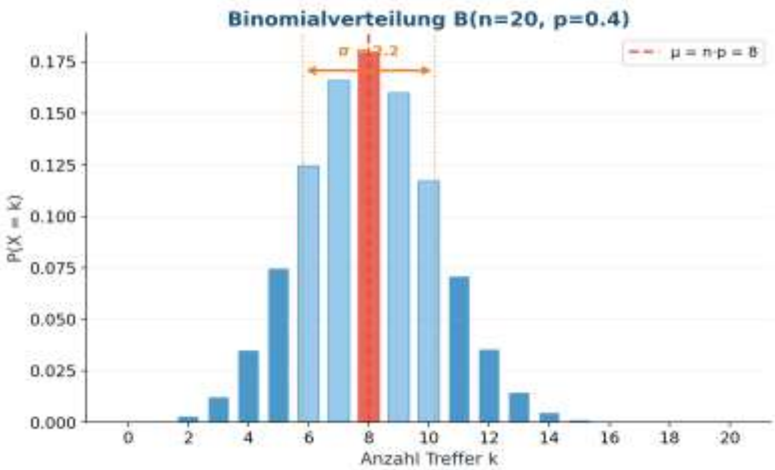

Abb. 3: Binomialverteilung B(20, 0,4) mit Erwartungswert und Standardabweichung

6.2 Kumulierte Binomialverteilung

Die kumulierte Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, höchstens k Treffer zu erzielen:

Kumuliert:	$P(X \leq k) = \Sigma_{i=0}{}^{k}\, C(n,i) \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

Wichtige Umrechnungen:

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

P(X ≥ k):	$1 - P(X \leq k-1)$
P(X > k):	$1 - P(X \leq k)$
P(X < k):	$P(X \leq k-1)$
P(a ≤ X ≤ b):	$P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$

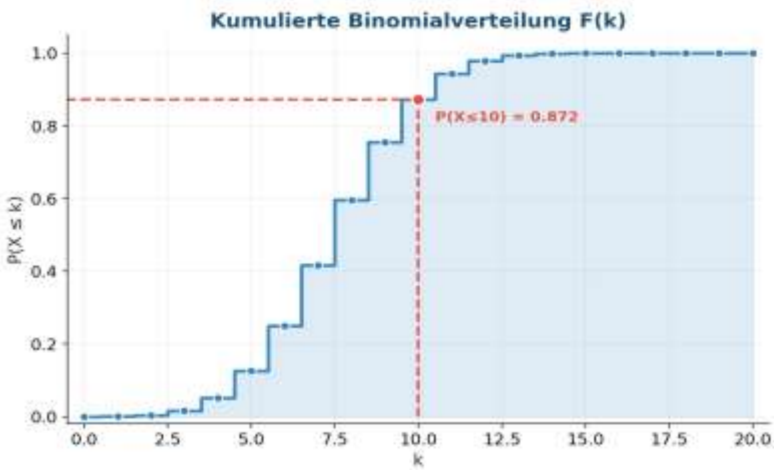

Abb. 4: Kumulierte Binomialverteilung F(k)

6.3 Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung

Erwartungswert:	$\mu = E(X) = n \cdot p$
Varianz:	$\sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$
Standardabweichung:	$\sigma = \sqrt{(n \cdot p \cdot (1-p))}$

✓ Tipp:
Der Erwartungswert μ = n·p gibt an, mit wie vielen Treffern man im Durchschnitt rechnen kann.
Die Standardabweichung σ beschreibt die typische Abweichung vom Erwartungswert.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Teil IV – Normalverteilung

7 Normalverteilung

Die Normalverteilung (Gauß-Verteilung) ist die wichtigste stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie wird durch Erwartungswert μ und Standardabweichung σ vollständig beschrieben.

7.1 Gaußsche Glockenkurve

Die Dichtefunktion der Normalverteilung lautet:

Dichtefunktion:	$f(x) = (1 / (\sigma\cdot\sqrt{(2\pi)})) \cdot e\hat{}(-(x-\mu)^2 / (2\sigma^2))$

μ = Erwartungswert (Lage des Maximums), σ = Standardabweichung (Breite der Kurve).

7.2 Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung hat μ = 0 und σ = 1. Jede Normalverteilung kann durch z-Transformation standardisiert werden:

z-Transformation:	$z = (x - \mu) / \sigma$
Dichtefunktion:	$\varphi(z) = (1 / \sqrt{(2\pi)}) \cdot e\hat{}(-z^2/2)$
Verteilungsfunktion:	$\Phi(z) = P(Z \leq z)$ (aus Tabelle ablesbar)

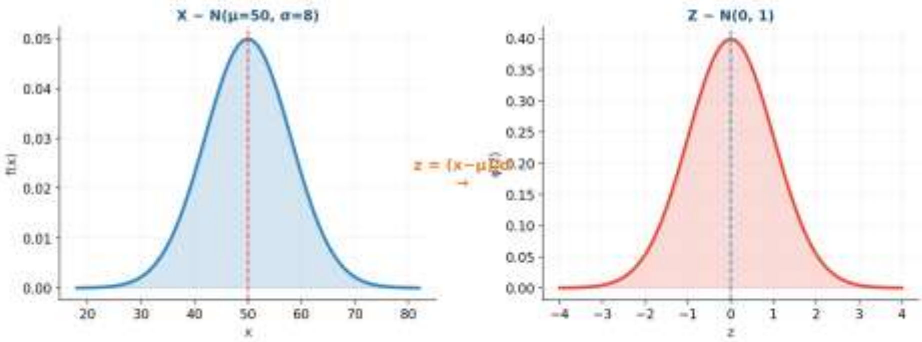

Abb. 5: z-Transformation – von X ~ N(μ, σ) zu Z ~ N(0, 1)

7.3 Wahrscheinlichkeiten berechnen

Mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung:

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

P(X ≤ b):	$\Phi((b-\mu)/\sigma)$
P(X ≥ a):	$1-\Phi((a-\mu)/\sigma)$
P(a ≤ X ≤ b):	$\Phi((b-\mu)/\sigma)-\Phi((a-\mu)/\sigma)$

7.4 Sigma-Regeln

Für normalverteilte Zufallsgrößen gilt näherungsweise:

Intervall	Wahrscheinlichkeit
$\mu-1\sigma \le X \le \mu+1\sigma$	≈ 68,3 %
$\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma$	≈ 95,4 %
$\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma$	≈ 99,7 %

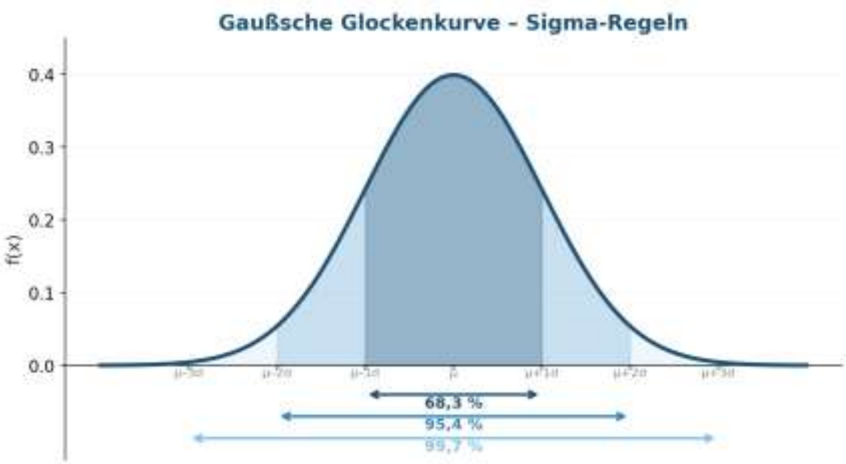

Abb. 6: Gaußsche Glockenkurve mit Sigma-Regeln

7.5 Normalapproximation der Binomialverteilung

Für große n kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung angenähert werden (Faustregel: $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} > 3$):

Approximation:	$X \sim B(n,p) \approx N(\mu = n\cdot p, \sigma^2 = n\cdot p\cdot(1-p))$
Stetigkeitskorrektur:	$P(X \le k) \approx \Phi((k+0{,}5-\mu)/\sigma)$

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

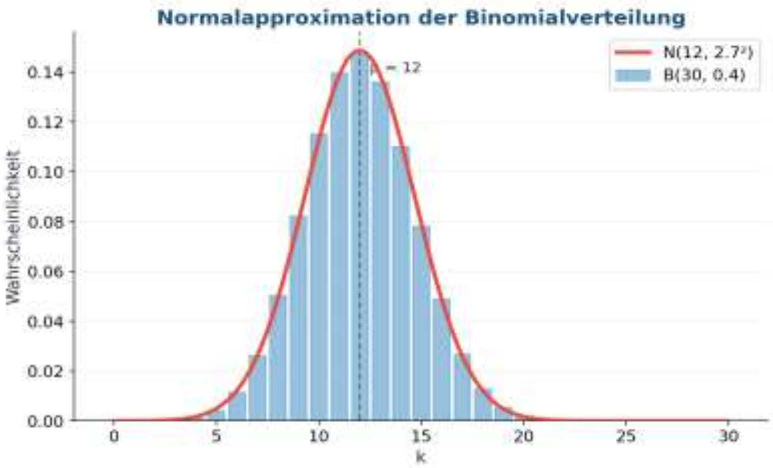

Abb. 7: Normalapproximation der Binomialverteilung

> **ℹ Merke:**
> Die Stetigkeitskorrektur (± 0,5) verbessert die Approximation, da die diskrete Binomialverteilung durch eine stetige Normalverteilung angenähert wird.

Karsten Keßler
tutor@kkessler.de
tutor.kkessler.de
14.02.2026

Formelübersicht

Wichtige Formeln auf einen Blick

Pfadmultiplikation:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
Pfadaddition:	$P(E) = P(Pfad_1) + P(Pfad_2) + \ldots$
Gegenereignis:	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Erwartungswert:	$\mu = E(X) = \Sigma\, x_i \cdot P(X = x_i)$
Varianz: **Standardabweichung:**	$Var(X) = \sigma^2 = \Sigma\, (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ $\sigma = \sqrt{}(Var(X))$
Bedingte W.keit: **Satz von Bayes:**	$P(A\|B) = P(A \cap B) \;/\; P(B)$ $P(A\|B) = P(B\|A) \cdot P(A) \;/\; P(B)$
Unabhängigkeit: **Bernoulliformel:**	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(X = k) = C(n,k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
μ (Binomial): **σ (Binomial):**	$n \cdot p$ $\sqrt{}(n \cdot p \cdot (1-p))$
z-Transformation:	$z = (x - \mu) \;/\; \sigma$