

0 Grundlagen

1 Aussagenlogik

Aufgabe 1

Welche Formulierung stellt eine Aussage dar?

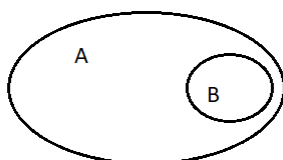
- a. $1+1=1$
- b. $1+2=3$
- c. Diese Aussage hat keinen Rächtschraibveler.
- d. Wie alt sind Sie?
- e. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- f. Nach dem Essen den Tisch aufräumen!
- g. Nachts ist es höher als drinnen.

1 Mengen

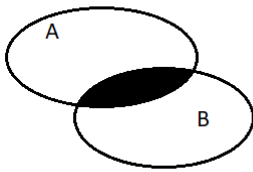
Aufgabe 2

Um welche Mengenoperation handelt es sich?

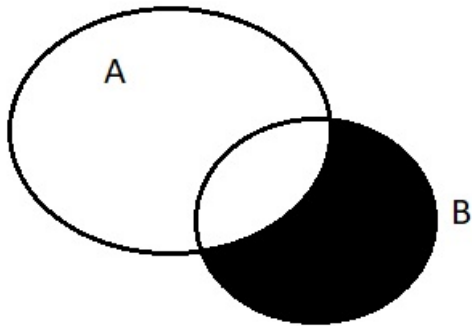
A:



B:

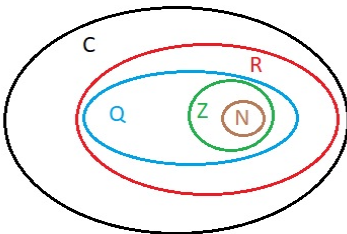


C:



Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen. Fassen Sie das Bild zu einer Inklusionskette zusammen:



Aufgabe 4

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an:

a. $M = \{x \mid x^2 = 9 \wedge x - 3 = 6\}$

b. $M = \{S, t, u, g, a, r\}$

Aufgabe 5

Gegeben seien die Mengen A, B und C mit:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{ \mid n \leq 4 \}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade} \}$$

[Hauptseite](#)

Bestimmen Sie:

a. $A \cup B$

b. $A \setminus B$

c. $B \setminus A$

d. $C \cap B$

1 Bruchrechnen

Aufgabe 6

Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

a. $\frac{-37-9}{6-\frac{1}{4}}$

b. $\frac{1}{3,5}$

c. $\frac{(1+0,04)^{\frac{5}{2}}}{(1+0,04)^{\frac{5}{2}-1}} - 1$

d. $\frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x-3}{x-2}$

Aufgabe 7

Berechnen Sie mit Taschenrechner.

a. $1000 \cdot \frac{(1+0,1)^4}{(1+0,2)^2-1,01}$

b. $\frac{(1+0,1)^5-1}{(1+0,1)^2-\frac{1}{1-0,2}}$

1 Potenzen

Aufgabe 8

Berechnen Sie schrittweise:

$$\sqrt[3]{-8}$$

Aufgabe 9

[Hauptseite](#)

Berechnen Sie:

$$(x^{-2} * y^{-3})^{-3} \cdot x$$

Aufgabe 10

Berechnen Sie den folgenden Term:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Aufgabe 11

Berechnen Sie:

$$\sqrt[3]{a^{5x+7}} \cdot \sqrt[4]{a^{3x+10}}$$

2 Logarithmen

Aufgabe 12

Berechnen Sie möglichst ohne Taschenrechner.

- a. $\ln(0,8)$
- b. $\ln(1,2)$
- c. $\ln(e)$
- d. $\ln(e^3 \cdot e^2)$
- e. $\log_{10}(1000)$
- f. $\log_{10}(2000)$
- g. $e \cdot \ln(e^e)$

1 Beträge

Aufgabe 13

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

- a. $|5x-9|=4$

b. $|4x-7|=7$

c. $|3x+7|=2|x-6|$

[Hauptseite](#)

1 ST Summen und Produkte

Aufgabe 14

Berechnen Sie die folgenden Summen und Produkte:

a. $\sum_{k=1}^5 k$

b. $\sum_{k=-3}^3 k^2$

c. $\prod_{k=1}^5 k$

d. $\prod_{k=-3}^3 2^k$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie den Wert der Summe $S = \sum_{j=1}^5 \prod_{i=j}^{j+1} i$

1 ST Folgen und Grenzwerte

Aufgabe 16

Gegeben sei die geometrische Folge (a_k) mit $a_k = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ und $a_1 = 3$.

Bestimmen Sie die geometrische Summe für

a. $S_9 = \sum_{k=1}^9 a_k$

b. $S_\infty = \sum_{k=1}^\infty a_k$

Aufgabe 17

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Aufgabe 18

Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der Fibonacci-Folge mit dem Bildungsgesetz $a_k = a_{k-2} + a_{k-1}$ mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$

Aufgabe 19

[Hauptseite](#)

Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge $a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}}$

Aufgabe 20

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$

1 Kombinatorik

Aufgabe 21

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\binom{n}{1} = n$$

Aufgabe 22

Bestimmen Sie mit dem Pascalschen Dreieck:

a. $\binom{5}{2}$

b. $(a+b)^4$

Aufgabe 23

Ein Wort sei eine geordnete Menge von n Buchstaben. Wie viele Worte kann man mit der Wortlänge 4 und den Buchstaben a, b, c und d bilden?

- a. Wenn jeder Buchstabe nur einmal vorkommen darf?
- b. Wenn jeder Buchstabe beliebig oft vorkommen darf?

Aufgabe 24

Eine Zahl sei eine geordnete Menge von n Ziffern. Wie viele 4-stellige Zahlen kann man mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 bilden?

- a. Wenn man jede Ziffer nur einmal verwenden darf?
- b. Wenn man jede Ziffer beliebig oft verwenden darf?

Aufgabe 25

[Hauptseite](#)

An einem Skatturnier nehmen 6 Personen teil. Wie viele verschiedenen Tische kann man zusammenstellen, wenn ein Tisch aus 3 Spielern besteht?

Aufgabe 26

Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Aufgabe 27

Das ASCII-Code ist eine Codierung von Buchstaben, Zahlen und Symbolen durch eine Folge von 7 Bits. Jedes Bit kann den Wert 0 oder 1 annehmen. Wie viele Zeichen können damit codiert werden?

Aufgabe 28

In einer Reihe stehen acht Stühle. Sechs Personen nehmen darauf zufällig Platz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Randplätze leer bleiben?

Aufgabe 29

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

1 Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 30

Lösen Sie die Ungleichung:

$$x^2 - 2x + 3 < (x - 1)(x + 2)$$

Aufgabe 31

Lösen Sie die Ungleichung:

$$0,9^n < 0,5$$

Aufgabe 32

[Hauptseite](#)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung:

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-1} = \frac{2x^2+1}{(x+2)(x-1)}$$

Aufgabe 33

Lösen Sie die Gleichung:

$$e^{x-1} + 1 = 2e^{1-x}$$

Aufgabe 34

Lösen Sie die Gleichung:

$$\sqrt{32} = 2^x$$

Aufgabe 35

Lösen Sie die Gleichung:

$$e^{\cos(x)} = 1$$

Aufgabe 36

Lösen Sie die Gleichung:

$$\ln(x^2 - 1) = \ln(x) + 1$$

Aufgabe 37

Zeigen Sie, dass für alle $x \geq 1$ gilt:

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$$

2 Funktionen

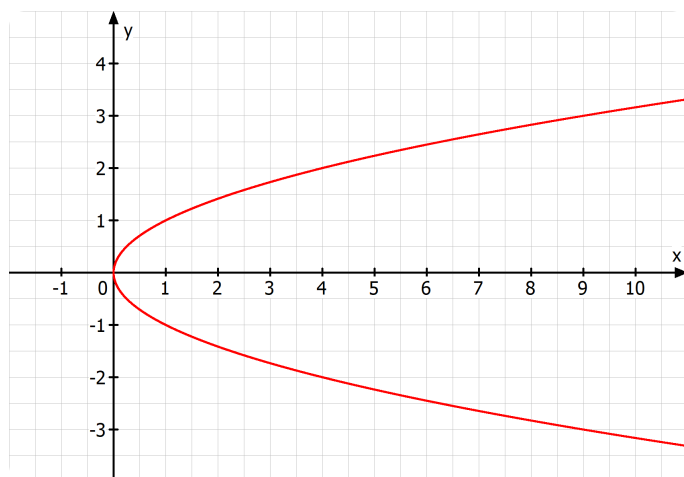
Begriff, Definitions- und Wertemenge

Aufgabe 38

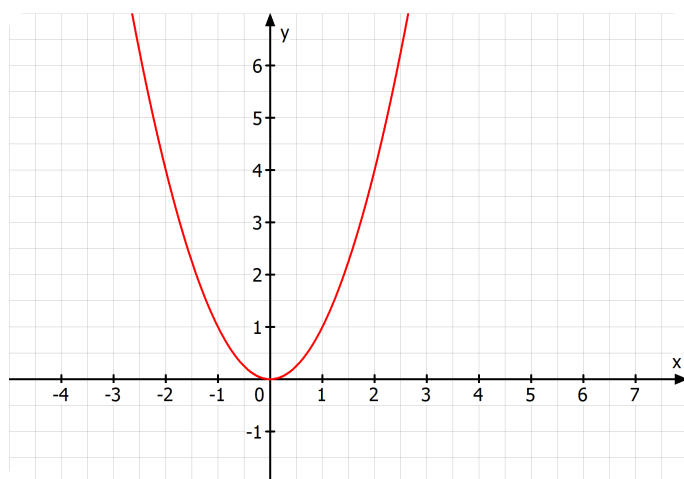
- Welcher Graph stellt eine Funktion $x \mapsto y = f(x)$ dar?
- Geben Sie ggf. Definitions- und Wertemenge an.

A:

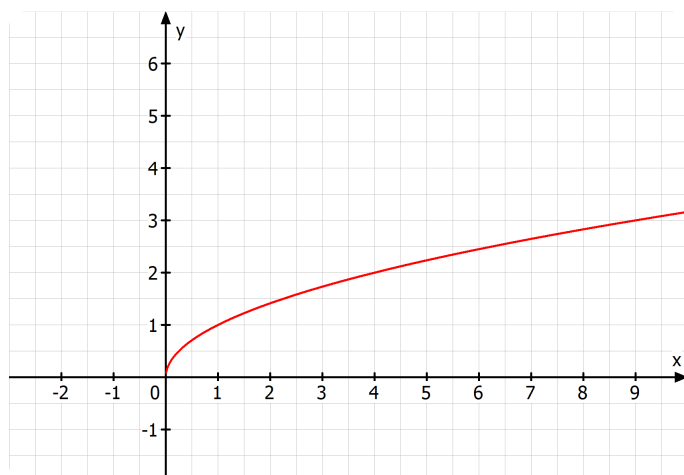
[Hauptseite](#)



B:



C:



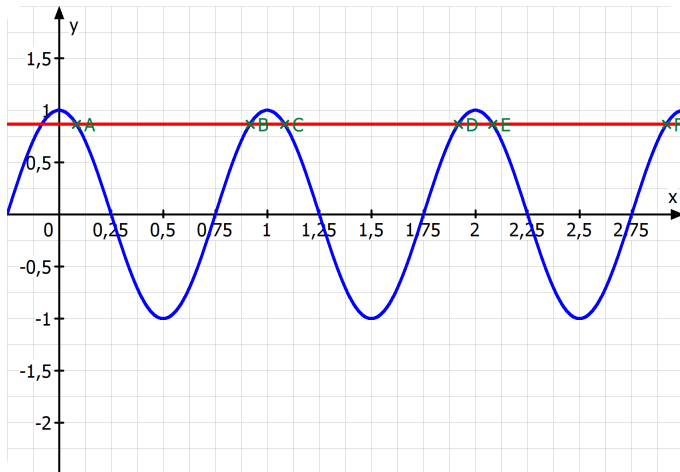
Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 39

Berechnen Sie alle Stellen $x > 0$, an denen die Funktion f den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ annimmt.

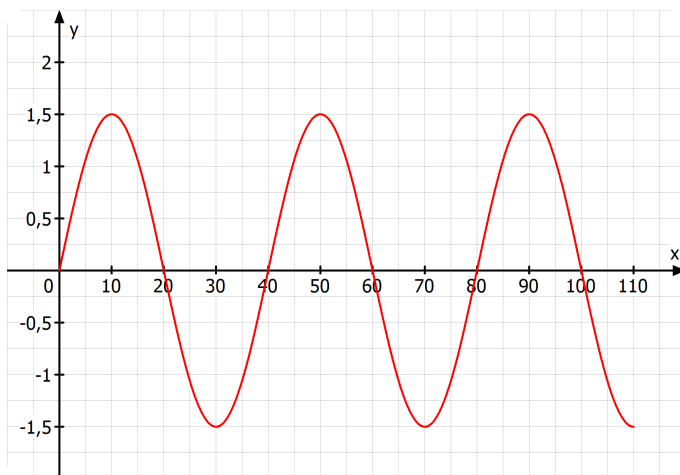
Es sei $f(x) = \cos(2\pi(x - 1))$.

[Hauptseite](#)



Aufgabe 40

Gegeben sei folgende Sinusschwingung:



- Bestimmen Sie deren Frequenz.
- Wie ändert sich die Frequenz, wenn sich die Zahl der Schwingungen drittelt?

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Aufgabe 41

Zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h gilt unter der Annahme konstanter Lufttemperatur der folgende Zusammenhang:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{a}}, \quad h \geq 0 \text{ (in m)}$$

$p_0 = 1,013 \text{ bar}$: Luftdruck an der Erdoberfläche, $a = 7991 \text{ m}$

- Geben Sie die Höhe als Funktion des Luftdruckes an und skizzieren Sie den Funktionsverlauf.
- In welcher Höhe hat sich der Luftdruck halbiert?

c. Wie groß ist der Luftdruck in 10km Höhe?

[Hauptseite](#)

Polynome

Aufgabe 42

Sind die Funktionen Polynome?

a. $f(x) = 3x^4 - x^2 + 14x - 9$

b. $f(x) = x^4 + x^2$

c. $f(x) = \sqrt{x} - 2$

d. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

e. $f(x) = (x+8)^8 x^7$

f. $f(x) = 11$

Gebrochen rationale Funktionen

Aufgabe 43

Führen Sie eine Polynomdivision durch:

a. $f(x) = \frac{2x^5+3x^4-2x^3+21}{2x^3+5x^2-3x+7}$

b. $f(x) = \frac{8x^5+34x^4-55x^3+4x}{4x^4-5x^3+2}$

Komposition, Translation, Skalierung, Spiegelung

Aufgabe 44

Es sei $f(x) = \sqrt{x} - 8$ und $g(x) = (x+9)^2$.

Berechnen Sie für die Verkettung $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ den Wert $(f \circ g)(5) = f(g(5))$

Aufgabe 45

a. $f(x) = x^2 - 2x - 2$ soll um 2 Einheiten in positiver y-Richtung verschoben werden. Bestimmen Sie die Funktion $g(x)$, die hieraus entsteht.

b. $f(x) = x^2 - 2x - 2$ soll um 2 Einheiten in negativer y-Richtung verschoben werden. Bestimmen Sie die Funktion $g(x)$, die hieraus entsteht.

Aufgabe 46

[Hauptseite](#)

- a. $f(x) = 4\sin(x)$ soll mit dem Faktor 3 gestaucht werden. Bestimmen Sie die Funktion $g(x)$, die hieraus entsteht.
- b. $f(x) = (x - 4)^2$ soll um den Faktor 4 gestreckt werden. Bestimmen Sie die Funktion $g(x)$, die hieraus entsteht.

Aufgabe 47

Spiegeln sie $f(x) = e^{-x}$ an der x-Achse und dann an der y-Achse. Wie lautet die Gleichung der Funktion $g(x)$, die entsteht?

Umkehrfunktion

Aufgabe 48

Bilden Sie rechnerisch und grafisch die Umkehrfunktion f^{-1} von:

$$f(x) = 3x - 2$$

1 Geometrie

Aufgabe 49

Gegeben sei das Dreieck ABC. Die Strecke $\overline{AD}$ steht senkrecht auf $\overline{BC}$.

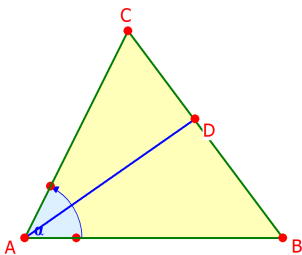
Weiterhin gilt:

$$\overline{AB} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 11,6 \text{ cm}$$

$$A_{ABC} = 54 \text{ cm}^2$$

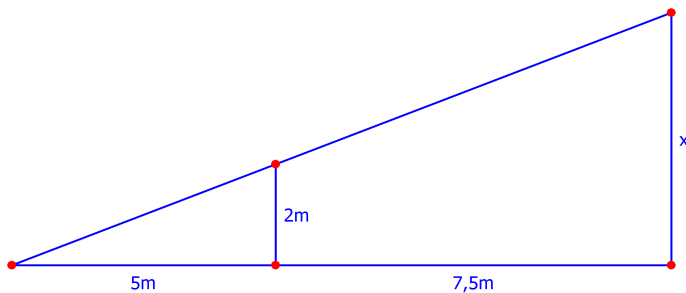
Berechnen Sie den Winkel α sowie den Abstand des Punktes D zu der Strecke $\overline{AB}$.



Aufgabe 50

[Hauptseite](#)

Bestimmen Sie die Länge x:



Aufgabe 51

Gegeben sei ein Rechteck mit dem Umfang $U=140$ cm und dem Flächeninhalt $A=1200$ cm². Berechnen Sie die Länge der Seiten a und b vom Rechteck.

Aufgabe 52

Geben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a=30$ cm und $b=40$ cm. Berechnen Sie die Hypotenuse c und die Winkel α und β .

2 ST Beweise

Aufgabe 53

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, n$$

Aufgabe 54

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$n^2 < 2^n, \quad n = 5, 6, 7, \dots$$

Aufgabe 55

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

[🏠 Hauptseite](#)

Aufgabe 56

Beweisen Sie: Die Funktion e^x wächst schneller als jede Potenzfunktion x^n .

Aufgabe 57

Beweisen Sie:

$$f(k \cdot x) = k^n \cdot f(x).$$

$f(x)$ sei Potenzfunktion x^n .

1 BF/LF Ableitungen

BF h-Methode

Aufgabe 58

Berechnen Sie $f'(x_0)$ mit Hilfe der h-Methode für das angegebene x_0 .

$$f(x) = 2x^2 \text{ und } x_0 = 1.$$

BF Faktorregel

Aufgabe 59

Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$f(x) = -3e^x$$

BF Summenregel

1.

Aufgabe 60

Bestimmen Sie für die Funktion

$$\text{a. } y = f(x) = 4x^7 + 3 \cos(x) - 5e^x + \ln(x)$$

die Ableitung nach x und für

$$\text{b. } z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

die Ableitung nach y.

BF/LF Produktregel

Aufgabe 61

Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$y = (4x^3 - 3x)(2e^x - \sin(x))$$

Aufgabe 62

Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$y = \frac{3x^2 - x}{\sin(x)}$$

Aufgabe 63

Leiten Sie die folgende Schwingungsgleichung nach der Zeit t ab:

$$y = y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Aufgabe 64

Leiten Sie die folgende Funktion ab:

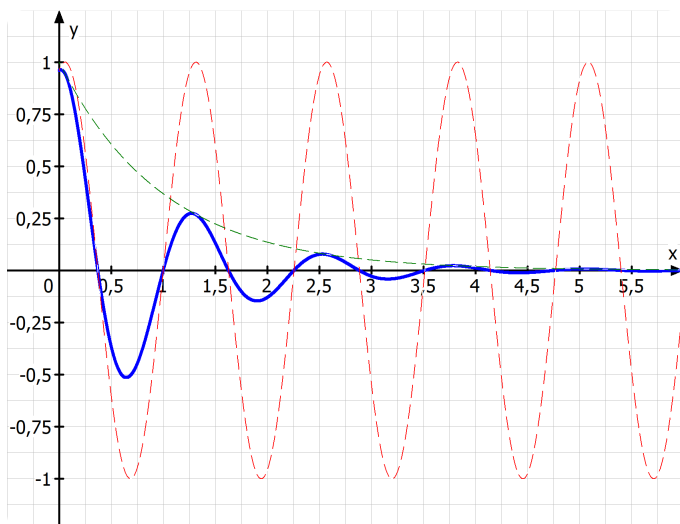
$$f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \ln(x)$$

Aufgabe 65

Die Größe $s(t)$ beschreibt die Auslenkung zum Zeitpunkt t einer freien, aber gedämpften Schwingung eines Feder-Masse-Pendels:

$$s(t) = e^{-t} \cdot \cos(5t + 6), \quad (t > 0)$$

a. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ des Pendels.



b. Wie verhält sich das Pendel für $t \rightarrow \infty$? Bestätigen Sie Ihre Vermutung rechnerisch

△ **Hauptseite**

c. Erklären Sie den Verlauf von $s(t)$.

Aufgabe 66

Zeigen Sie:

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Aufgabe 67

Zeigen Sie:

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \text{ Double exponent: use braces to clarify}$$

Aufgabe 68

Bestimmen Sie die 1. Ableitung für:

$$f(x) = x^x$$

Aufgabe 69

Zeigen Sie:

$$(f - g)' = f' - g'$$

Aufgabe 70

[ST] Differenzieren Sie die Funktion nach x und die so erhaltene Ableitung dann nach t :

a. $f(x, t) = x^2 \cdot t^2$

b. $f(x, t) = x \cdot e^t$

c. $f(x, t) = t \cdot e^{ax}$

d. $f(x, t) = \sqrt{x} \cdot \cos(at)$

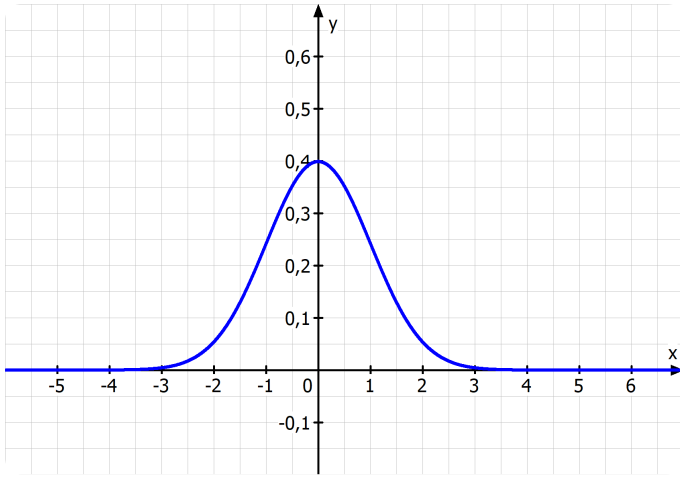
e. $f(x, t) = \ln(ax) \cdot \sqrt{bt}$

Aufgabe 71

[ST] Bestimmen Sie die lokalen Extrema für die Gauß-Verteilung

$$f(x; \sigma, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Graphik der Gauß-Verteilung für $\sigma = 1$ und $\mu = 0$:



Aufgabe 72

[ST] Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 \cdot \ln(x^2 + y^2)$.

Bestimmen Sie die Ableitung von f nach x und nach y .

Aufgabe 73

Geben Sie die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2e^{0,5 \cdot \ln(1 + \ln(x))}$$

an.

1 BF Monotonieverhalten

Aufgabe 74

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f auf $\mathbb{R}$. Geben Sie die Intervalle an, auf denen f streng monoton steigt beziehungsweise fällt.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

2 BF Krümmung

Aufgabe 75

Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion f auf $\mathbb{R}$ und die Koordinaten ihrer Wendepunkte.

$$f(x) = x^4 - 6x^2$$

3 BF Tangentenprobleme

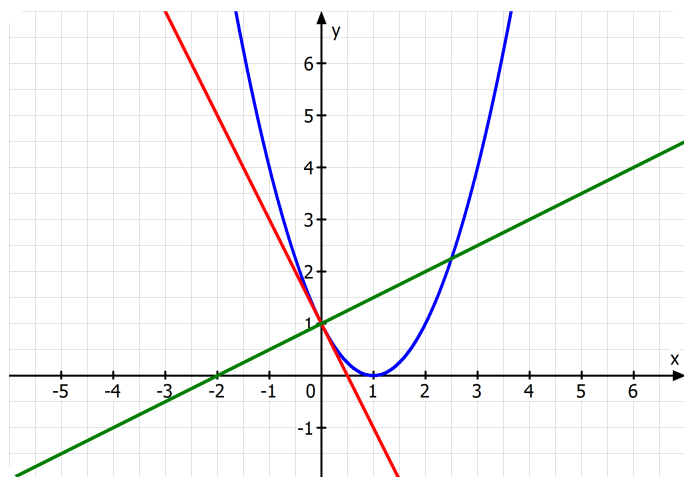
[Hauptseite](#)

BF Tangenten- und Normalengleichung

Aufgabe 76

Wie lauten die Gleichung der Tangente und Normale im Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse?

$$y = x^2 - 2x + 1$$



Aufgabe 77

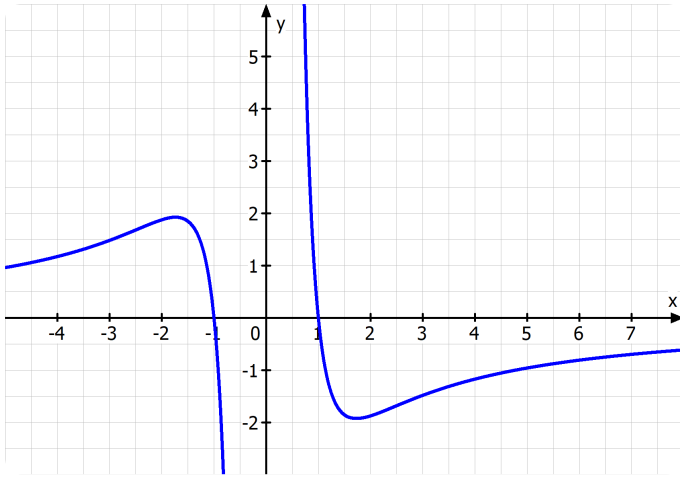
Für jeden Wert für a ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = e^{ax^2}$ ($x \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass die Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt P_a ($1 | f_a(1)$) durch die Gleichung $t_a(x) = 2a \cdot e^a \cdot x + e^a(1 - 2a)$ beschrieben werden kann.

4 BF/LF Kurvendiskussion

Aufgabe 78

Stellen Sie für die Funktion y die Funktionseigenschaften und den Funktionsverlauf mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung vor.

$$y = \frac{-5x^2 + 5}{x^3}$$



Ermitteln Sie:

- Definitionsbereich mit Definitionslücken
- Symmetrie (gerade, ungerade Funktion)
- Nullstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse
- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgerade)
- Ableitungen (i.d.R. bis zur 3. Ableitung)
- Relative Extrema (Maxima und Minima)
- Wendepunkte, Sattelpunkte, Krümmungsverhalten
- Verhalten der Funktion für x gegen Unendlich, Asymptoten im Unendlichen
- Wertebereich der Funktion
- Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Maßstab mit den charakteristischen Punkten

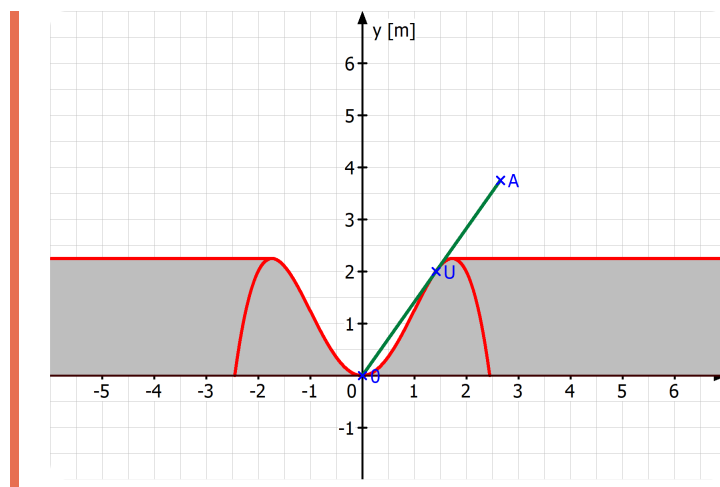
Aufgabe 79

Die Abbildung von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2$ zeigt einen Querschnitt, z.B. von einem Kanal. Auf beiden Seiten der Hochpunkte verläuft die Linie horizontal.

- Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f . Wie breit und wie tief ist der Kanal?
- Bestimmen Sie die Wendepunkte von f und markieren Sie die Wendepunkte in der Skizze.
- Die Gerade g schneidet das Schaubild der Funktion f im Ursprung und berührt das Schaubild der Funktion f im Punkt $U(u \mid f(u))$ mit $u > 0$. Berechnen Sie u .

- e. Eine Person mit Augenhöhe $h = 1.5\text{m}$ steht soweit vom Rand des Kanals entfernt, dass sie gerade noch die tiefste Stelle des Kanals sehen kann. Berechnen Sie die Koordinate x , in dem sich das Auge befindet.

[Hauptseite](#)



Aufgabe 80

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4x + 8} - 6$.

1 BF/LF Wachstum

W Linear

Aufgabe 81

Ein Objekt kostet 120.000€. Stellen Sie in einer Tabelle die Weiterentwicklung für die nächsten 6 Jahre zusammen und berechnen Sie den Wert in 20 Jahren unter der Annahme, dass der Wert jährlich um 2.400€ sinkt.

BF Exponentiell

Aufgabe 82

Bei der Geburt von Julia hat ihr Opa auf einem Sparbuch 100€ zu 2,8% angelegt.

- Wieviel Geld befindet sich an Julias 18. Geburtstag auf dem Sparbuch?
- An ihrem 18. Geburtstag beschließt Julia, das Guthaben so lange auf dem Sparbuch zu lassen, bis sich der ursprüngliche Betrag verdoppelt hat. Wie lange muss sie noch warten?

Aufgabe 83

Ein kleiner Teich hat Platz für 100 Fische. 40 Fische leben zu Beginn in dem Teich. Nach 5 Monaten sind es 80 Fische.

Zeigen Sie, dass man die Anzahl der Fische in Abhängigkeit der Zeit mit dieser Gleichung ausdrücken kann:

$$f(t) = 100 - 60 \cdot e^{-0,22 \cdot t}$$

Aufgabe 84

Die Entwicklung einer Tierpopulation kann durch beschränktes Wachstum modelliert werden. Zu Beginn sind 300 Tiere vorhanden, nach 6 Monaten sind es 500. In dem Gebiet können maximal 800 Kaninchen leben.

- Beschreiben Sie den Bestand mit begrenztem Wachstum durch eine Funktion.
- Wie viele Tiere sind es nach einem Jahr, wie viele nach 2 Jahren?
- Nach wieviel Monaten sind 700 Tiere vorhanden?
- Wie hoch ist die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn, wie hoch ist sie nach einem Jahr?

LF **Logistisch**

Aufgabe 85

Ein Bestand wächst logistisch mit der Schranke $S=50$. Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Bestand 4 und zum Zeitpunkt 3 beträgt er 8.

Bestimmen Sie die dazu passende Wachstumsfunktion.

Aufgabe 86

Eine Blume ist zu Beginn 5cm groß. Nach 60 Tagen ist sie 20cm groß und am Ende ihres Wachstums 70cm.

- Bestimmen Sie die dazu passende Wachstumsfunktion.
- Wie hoch ist ihre Wachstumsgeschwindigkeit nach 30 Tagen?

1 LF Extremwertaufgaben

[Hauptseite](#)

Aufgabe 87

Einem Quadrat mit der vorgegebenen Seitenlänge a ist ein Rechteck mit größtem Flächeninhalt einzubeschreiben. Die Rechteckseiten sollen dabei parallel zu den Diagonalen des Quadrats verlaufen.

Fertigen Sie eine Skizze an, bestimmen Sie dann die Flächenfunktion $A(x)$ und schließlich deren Maximum.

Aufgabe 88

Eine oben offene zylindrische Wassertonne soll aus Kunststoff hergestellt werden und ein Volumen von 200l haben. Ermitteln Sie die Abmessung der Tonne, wenn der Materialverbrauch möglichst gering sein soll.

Aufgabe 89

Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist eine Gerade $g_t(x) = -3tx + 12t + 4$ gegeben. Diese Gerade schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten X_t und Y_t . Wie muss man t wählen, damit das Dreieck OX_tY_t einen minimalen Flächeninhalt besitzt? Geben Sie zusätzlich diesen an.

Aufgabe 90

Aus zwei 20 cm breiten Brettern soll eine V-förmige Holzdachrinne hergestellt werden. Bei welchem Abstand der oberen Bretterkante ist das Fassungsvermögen am größten? Wie groß sind dann die Querschnittsfläche und der Winkel zwischen den Brettern?

Aufgabe 91

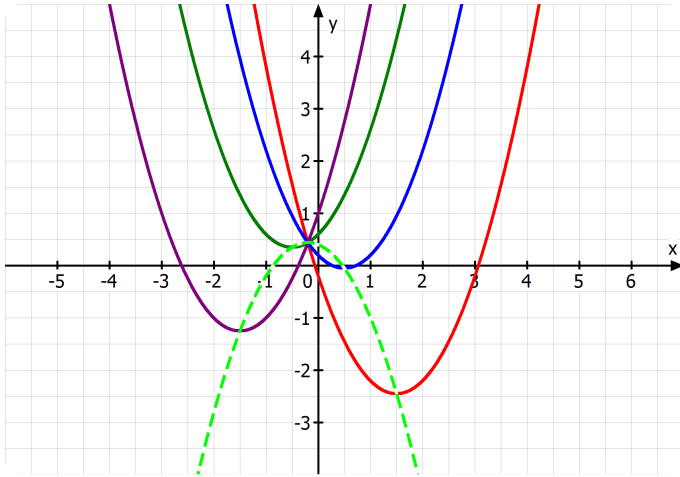
Aus einem kreisförmigen Papier soll ein Stück bis zum Mittelpunkt hin mit dem Winkel α ausgeschnitten werden. Wird das Papier zusammengelegt, entsteht ein Kegel. Für welchen Winkel α wird das Volumen des so entstehenden Kegels maximal?

2 LF Parameterfunktionen

Aufgabe 92

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit

$$f_t(x) = x^2 - (2 - t)x + 0,2t.$$



- Untersuchen Sie den Graphen der Funktionenschar auf Extrempunkte.
- Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrempunkte.
- Untersuchen Sie, ob die Graphen gemeinsame Punkte besitzen.
- Skizzieren Sie den Graphen der Schar für $t = -1, 1, 3, 5$. Zeichnen Sie die Ortskurve der Extrempunkte in dasselbe Koordinatensystem.

1 BF/LF/ST Integralrechnung

BF/LF Grund- und Stammintegrale

Aufgabe 93

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

Aufgabe 94

Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5) \, dx$$

Aufgabe 95

Der Flächeninhalt der Sinuskurve im Bereich der ersten Halbperiode lässt sich mit Hilfe des bestimmten Integrals

$A = \int_0^\pi \sin(x) \, dx$ berechnen. Wie groß ist dieser?

Aufgabe 96

[🏠 Hauptseite](#)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F: x \mapsto x \cdot \ln \frac{x}{4-x} + 4 \cdot \ln(4-x)$$

eine Stammfunktion zu

$$f: x \mapsto \ln \frac{x}{4-x} \text{ ist.}$$

BF/LF Elementare Integrationsregeln

Aufgabe 97

Berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^1 (3e^x - 2x) \, dx$$

Aufgabe 98

Berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^\pi 4 \sin(x) \, dx$$

Aufgabe 99

Berechnen Sie das Integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos(x) \, dx$$

Aufgabe 100

Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert. Betrachten Sie dazu die beiden Teilintegrale links und rechts der Singularität $x = 0$ getrennt.

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{x} \, dx$$

Aufgabe 101

Berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^{\ln(2)} 2 \cdot e^{-2x} \, dx$$

ST Integration durch Substitution

Aufgabe 102

Lösen Sie:

$$\int (x \bullet \cos(x^2)) \backslash dx$$

Aufgabe 103

Lösen Sie:

$$\int (2x - 3)^6 \backslash dx$$

ST Partielle Integration

Aufgabe 104

Lösen Sie:

$$\int \ln(x) dx$$

Aufgabe 105

Lösen Sie:

$$\int x^2 \bullet \cos(x) dx$$

Weitere Integrale

Aufgabe 106

Lösen Sie:

$$\int \frac{1}{8x} \backslash dx$$

BF/LF Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x-Achse

Aufgabe 107

Gesucht ist der Flächeninhalt A, der von der Parabel

$$y = x^2 - 2x + 3,$$

der x-Achse und der Parallelen $x=0$ und $x=3$ begrenzt wird.

Aufgabe 108

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Polynomfunktion

$$y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8,$$

der x-Achse und den Parallelen $x=-2,5$ und $x=3$.

Aufgabe 109

Gegeben sei die Funktion f mit $f_a(x) = -ax^2 + a$ mit $a \geq 0$. Der Graph von f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie a so, dass der Flächeninhalt 4 ist.

BF/LF Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

Aufgabe 110

Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen der Parabel

$$y_1 = -0,5x^2 + 6$$

und der Geraden

$$y_2 = 1,5x + 2$$

Aufgabe 111

Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen der Parabel

$$y_1 = 2,5x^2 - 8,75x$$

und der Kurve

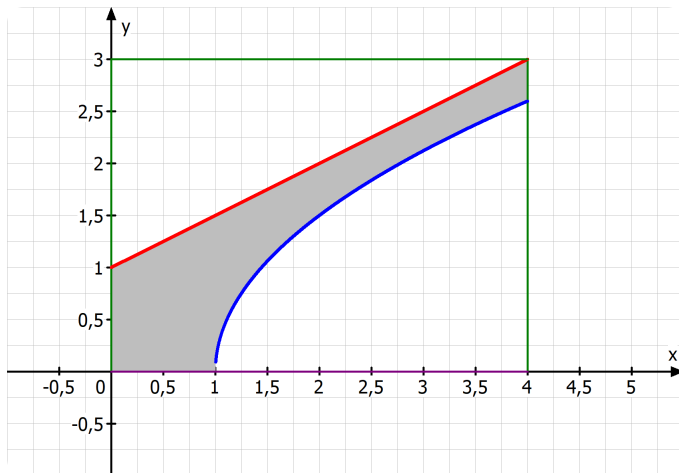
$$y_1 = 2x^3 - 12x^2 + 16x$$

Aufgabe 112

[Hauptseite](#)

Es sei $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x-1}$ und $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 1$.

Die beiden Funktionen f und g bilden zusammen mit drei weiteren Geradenstücken die abgebildete Fläche A .



- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A .
- Durch Rotation der Fläche um die x -Achse entsteht der Glaskörper einer Schale. Welches Volumen hat das zur Herstellung des Glaskörpers benötigte Glas?

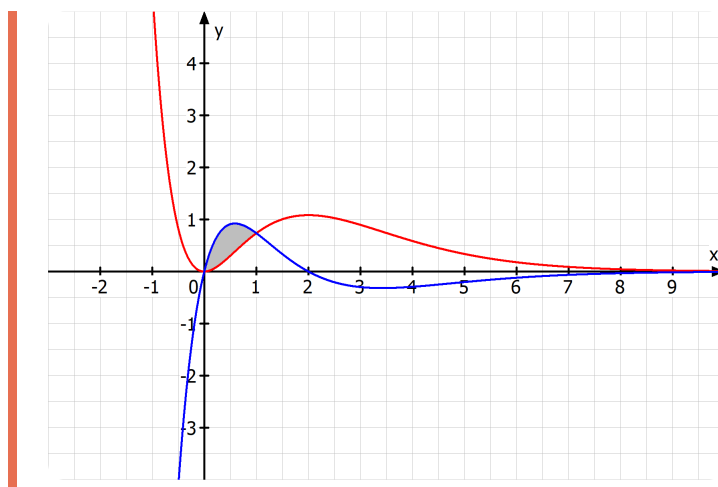
Aufgabe 113

Es sei $f(x) = \sqrt{x}$ und das Rechteck $ABCD$ gegeben durch die Punkte $A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(4|2)$ und

$D(1|2)$. $f(x)$ zerlegt das Rechteck in zwei Teilflächen. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der Teilflächen.

Aufgabe 114

Gegeben sei die Funktion f und ihre Ableitung.



- Ordnen Sie diese auf dem Schaubild zu.
- Die Funktion f sei $f(x) = 2x^2 \cdot e^{-x}$. Bestimmen Sie den Hochpunkt der Funktion.

c. Bestimmen Sie, für welche Werte von a die Gleichung $f(x) = a$ ~~keine eine zwei und~~ mehrere Lösungen hat.

[Hauptseite](#)

d. Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = 2(-x^2 - 2x - 2) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.

e. f und f' schließen im I. Quadranten eine Fläche ein. Bestimmen sie den Inhalt der Fläche.

1 LF Rotationsvolumen

Aufgabe 115

Bestimmen Sie das durch Drehung um die x -Achse entstandene Rotationsvolumen der Kosinuskurve:

$$y = f(x) = \cos(x), \text{ wobei } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 116

Bestimmen Sie das durch Drehung um die y -Achse entstandene Rotationsvolumen für die folgende Funktion:

$$y = f(x) = 0,1x^2, \text{ wobei } 2 \leq x \leq 5$$

Aufgabe 117

Leiten Sie die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers her.

2 LF Integralfunktionen

Aufgabe 118

Berechnen Sie die gegen das Gravitationsfeld der Erde aufzubringende Arbeit, wenn eine Masse m ins Unendliche ($r=\infty$) gebracht wird (Gravitationskonstante γ , Erdmasse M).

Dabei gilt:

$$W = \int_{r_0}^{\infty} \gamma \frac{mM}{r^2} \, dr = \gamma mM \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \, dr$$

Aufgabe 119

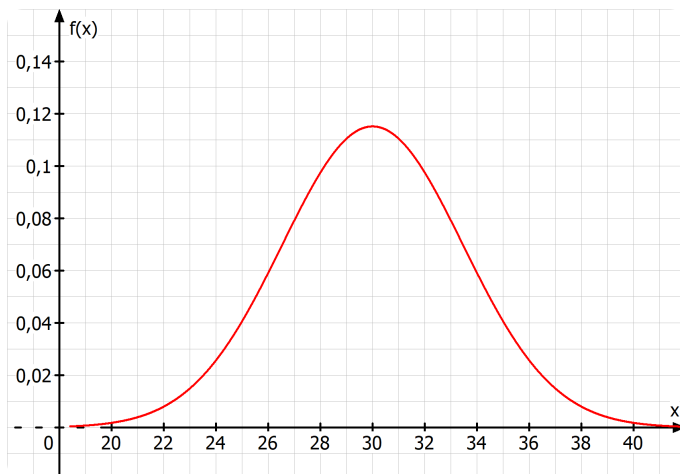
Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\int_{-x}^x (e^{-t} + e^t) \, dt = 2$$

Aufgabe 120

[Hauptseite](#)

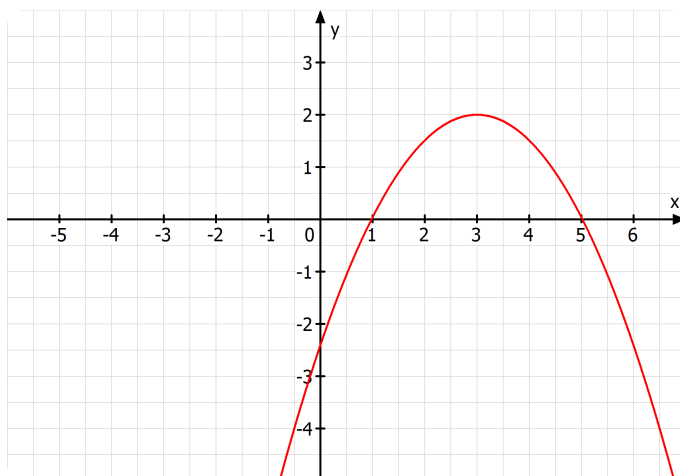
Gegeben sei eine Gaußsche Normalverteilung $f(x)$.



Skizzieren Sie den Verlauf der Integralfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, d.h. der Verteilungsfunktion $F(x)$ der Gaußschen Normalverteilung.

Aufgabe 121

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $J_0 = \int_0^x f(t) dt$ für $0 \leq x \leq 6$.



3 LF Uneigentliches Integral

Aufgabe 122

a. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F: x \mapsto -e^{-2x} \cdot (x + 1, 5)$$

eine Stammfunktion zu

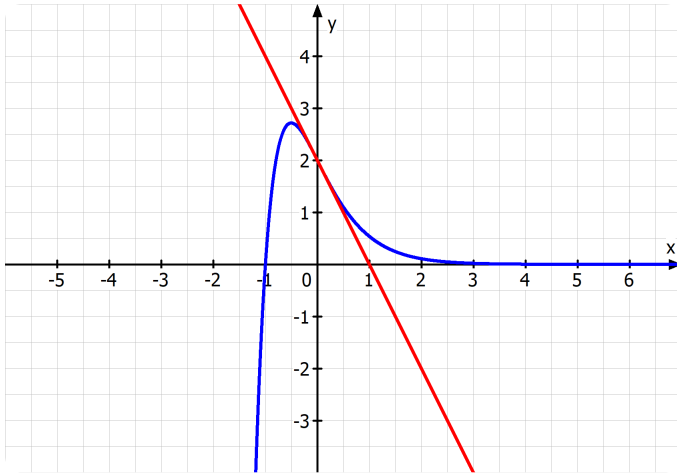
$$f(x) = 2 \frac{x+1}{e^{2x}} \text{ ist.}$$

- b. Im ersten Quadranten begrenzen die Wendetangente $2x + y - 2 = 0$ die x-Achse, die Gerade $x=k$ mit $k>1$ und $f(x)$ eine Fläche.

[Hauptseite](#)

Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(k)$ dieser Fläche.

- c. Kann dieser Flächeninhalt $A(k)$ für $k \rightarrow +\infty$ beliebig groß werden?



1 BF/LF Rekonstruktion einer Größe

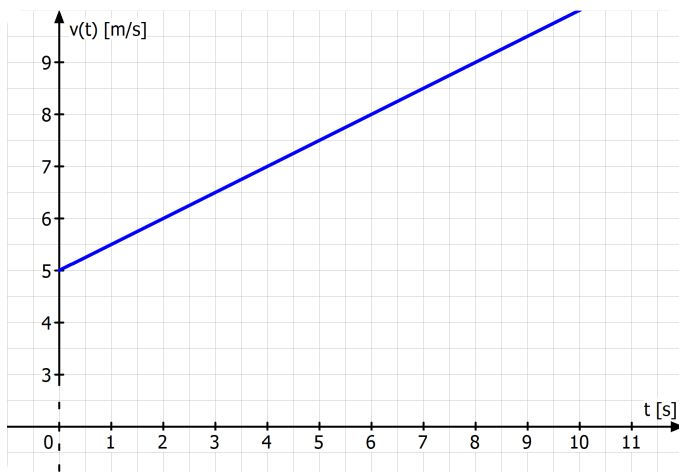
Aufgabe 123

Die Grafik zeigt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit in einem v-t-Diagramm.

- a. Bestimmen Sie die zurückgelegte Strecke nach 8s graphisch (Fläche abmessen) und analytisch (Integralrechnung).

Es gilt: $v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow ds = v dt$ und somit: $\int ds = \int v dt$

- b. Zeigen Sie dann rechnerisch, dass die Strecke für $t \rightarrow \infty$ unendlich anwachsen würde.



Aufgabe 124

[Hauptseite](#)

Die Gleichung für die Beschleunigung eines Federpendels ist:

$$a(t) = -\omega \cos(\omega t).$$

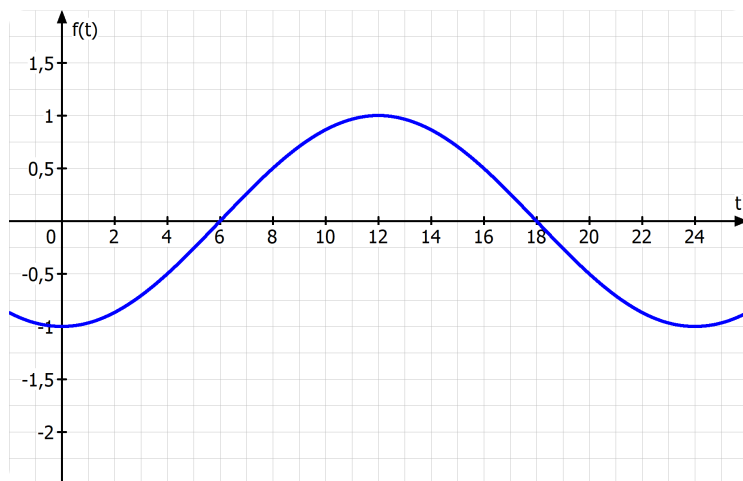
Gewinnen Sie hieraus:

- Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v=v(t)$.
- Die Weg-Zeit-Funktion $s=s(t)$.

Es gilt: $a = v' = s''$.

Aufgabe 125

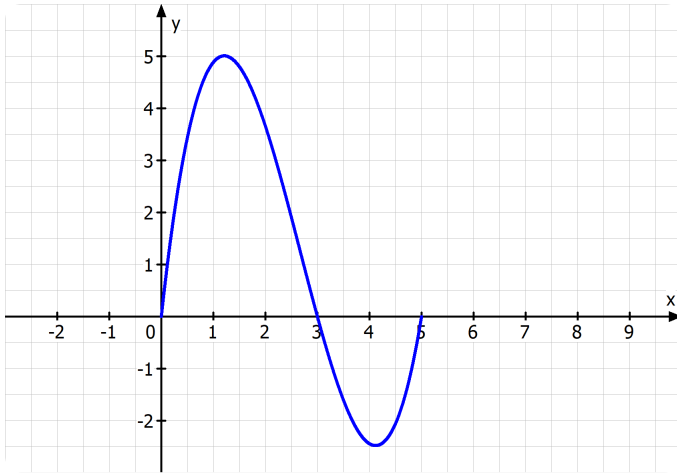
Der Graph $f(t) = \cos(\frac{2\pi}{24}t - \pi)$ stellt die Änderungsrate der Lufttemperatur an einem Sommertag dar (t in Stunden nach 0 Uhr, $f(t)$ in $\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$).



- In welcher Zeitspanne nimmt die Lufttemperatur zu bzw. ab?
- Zu welchen Uhrzeiten ändert sich die Lufttemperatur am schnellsten bzw. am langsamsten?
- Zu welchen Zeitpunkten ist die Temperatur minimal bzw. maximal?
- Bestimmen Sie die maximale Tagestemperatur, wenn um zwölf Uhr die Temperatur 20°C beträgt.

Aufgabe 126

Ein quaderförmiges Wasserbecken hat eine Grundfläche von 5m² und ist zunächst leer. Der Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$) der Flüssigkeit über einen Zeitraum von fünf Stunden wieder.



- Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.
- Skizzieren Sie einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstands im Wasserbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.

Aufgabe 127

Gegeben sei die Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = at$ sowie der zur Zeit $t=0$ zurückgelegte Weg $s(0) = s_0$. Bestimmen sie $s(t_1)$.

1 LF Mittelwert einer Funktion

Aufgabe 128

Ein Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand heraus gleichmäßig in 6s auf eine Geschwindigkeit von 100km/h. Berechne seine durchschnittliche Geschwindigkeit.

Aufgabe 129

Ein Unternehmen bringt ein neues Produkt auf den Markt. Die Marketingabteilung modelliert die Preisentwicklung durch die Funktion p mit $p(t) = 15 \cdot e^{-0,2t} + 25$. Dabei ist t die Zeit in Monaten nach der Markteinführung des Produkts und $p(t)$ der zum Zeitpunkt t erzielbare Verkaufspreis in Euro. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis im ersten Jahr nach der Markteinführung.

Aufgabe 130

Ein Gummibärchenhersteller bringt eine neue Geschmacksrichtung auf den Markt. Die Absatzzahlen lassen sich durch die Funktion a mit $a(t) = 10t \cdot e^{-0,1t}$ beschreiben (t in Monaten nach der Markteinführung, $a(t)$ in Tausend Tafeln pro Monat).

- Weisen Sie nach, dass A mit $A(t) = -100 \cdot e^{-0,1t} \cdot (t + 10)$ eine Stammfunktion von a ist.

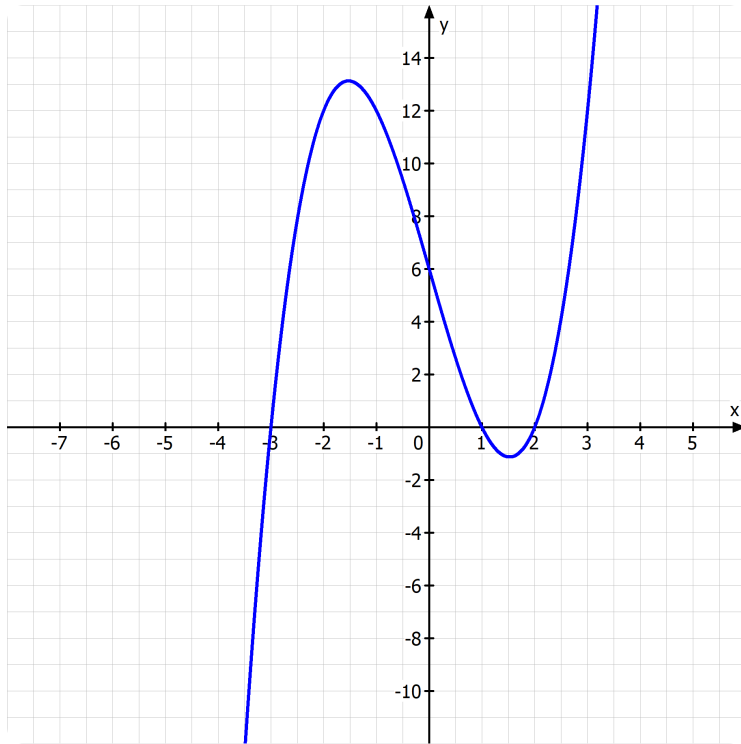
- b. Bestimmen Sie die durchschnittlichen monatlichen Absatzzahlen in den ersten zwei Jahren nach der Markteinführung.

[Hauptseite](#)

1 LF Funktionsgleichungen bestimmen

Aufgabe 131

Die Abbildung zeigt eine Funktion $f(x)$. Bestimmen Sie ihre Funktionsgleichung und skizzieren Sie ihre Ableitung $f'(x)$ und diejenige Stammfunktion $F(x)$, die durch den Punkt $P(0|4)$ verläuft.



Aufgabe 132

Ermitteln Sie eine passende Funktion f der Form $f(x) = (x + a) \cdot e^{kx}$ mit $k \neq 0$, wobei die Funktion die Nullstelle 1 und die Wendestelle -3 hat.

Aufgabe 133

Geben Sie den Term einer Funktion an, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllt.

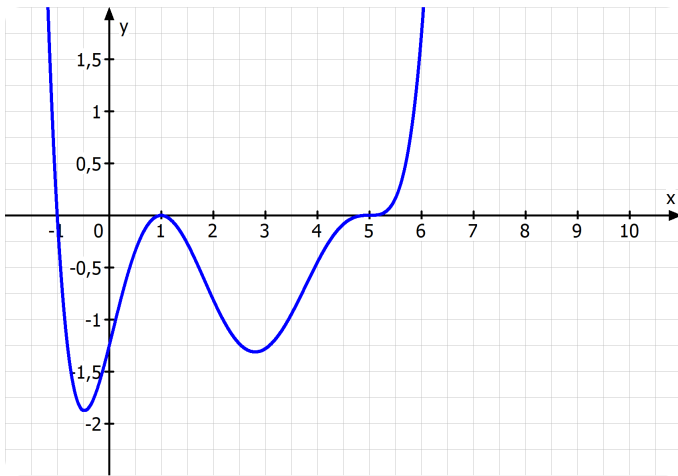
- Die Funktionswerte wachsen im Intervall $(-\infty; 4]$ und fallen für $x > 4$.
- $f(x)$ ist auf $[-5; 5]$ definiert und hat zwei lokale Maxima und ein lokales Minimum.
- $f(x)$ besitzt ein lokales Maximum und ein lokales Minimum, aber keine globalen Extremwerte.

Aufgabe 134

[Hauptseite](#)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{100}(x+1)(x-1)^2(x-5)^3$.

Erklären Sie an der Grafik deren Verlauf.



Aufgabe 135

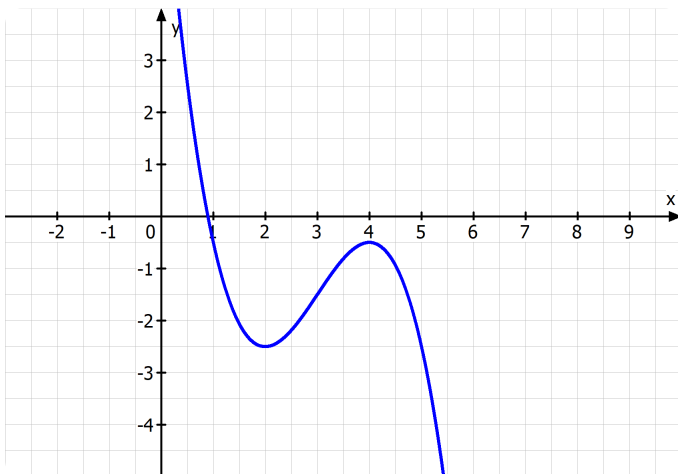
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{13}{3}x + 5$.

Stellen Sie f in Form eines Produktes ihrer Linearfaktoren dar (Zerlegung in Linearfaktoren).

- Mit dem Horner-Schema
- Mit Polynomdivision
- Skizzieren Sie die Funktion f durch ihre charakteristischen Punkte und ihren globalen Verlauf

Aufgabe 136

Es sei $f(x) = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 12x + 7,5$.



- Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $f(x)=0$ genau eine Lösung hat.

b. Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von $f(x)$.

[Hauptseite](#)

1 ST Bogenlänge

Aufgabe 137

a. Zeigen Sie: Für die Bogenlänge einer ebenen Kurve gilt:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

b. Berechnen Sie die Länge der Kurve $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 3]$.

1 BF/LF Vektoren

Aufgabe 138

Eine Firma verkauft 3 Artikel A, B und C. Von A werden 18 Einheiten verkauft, von B 34 und von C 17 Einheiten. Die entsprechenden Stückpreise betragen 12€ für Einheit A, 9€ für B und 13€ für C.

Berechnen Sie den Umsatz mithilfe des Absatzvektors $\vec{a}$ und des Preisvektors $\vec{p}$.

Aufgabe 139

Berechnen Sie die den Abstand des Vektors $\vec{a}$ vom Ursprung („Länge“, euklidische Norm).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 140

Es seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Zielpunkt, der sich ausgehend vom Ursprung durch nachfolgende Wegbeschreibung ergibt und zeichnen Sie diesen auf.

- Laufen Sie zunächst den Vektor $\vec{v}$ ab.
- Dann zweimal in Richtung von $\vec{w}$.
- Bilden Sie die Differenz $\vec{w} - \vec{x}$ und gehen Sie in entgegengesetzter Richtung die halbe Strecke.
- Laufen Sie schließlich entlang des Vektors $\vec{y}$ die 2,5-fache Strecke zum Zielpunkt.

Aufgabe 141

Welchen Winkel bilden die beiden Geschwindigkeiten $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ m/s}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ m/s}$ miteinander?

Aufgabe 142

Die Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld $\vec{B}$ beträgt:

$$\vec{F}_L = q \bullet \vec{v} \times \vec{B}$$

[Hauptseite](#)

Berechnen Sie diesen Kraftvektor und seinen Betrag für die folgenden Daten:

$$q = -1,6 \bullet 10^{-19} \text{ As}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} T$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet 10^6 \text{ m/s}$$

Aufgabe 143

Es sei α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten a beziehungsweise c.

$$\text{a. } \alpha = 45^\circ, \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \alpha = 60^\circ, \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 144

$$\text{Es sei } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ist } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ eine Linearkombination von } \vec{x} \text{ und } \vec{y}?$$

Aufgabe 145

Beweisen Sie, dass für das Vektorprodukt gilt:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Aufgabe 146

Zeigen Sie, dass man den Mittelpunkt zwischen zwei Punkten A und B (den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$) derart berechnen kann:

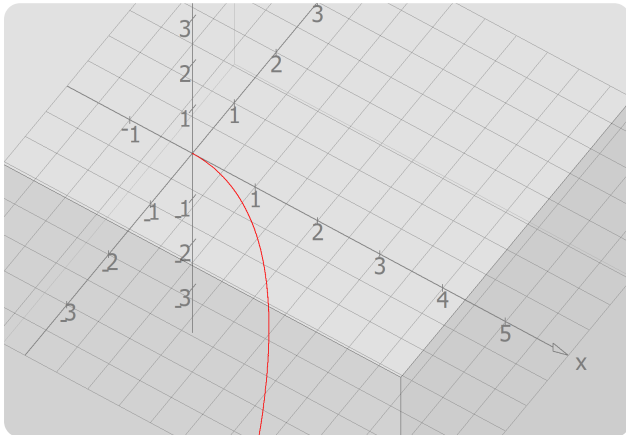
$$M \left(\frac{a_1 + b_1}{2} \mid \frac{a_2 + b_2}{2} \mid \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 147

Ein waagrecht geworfener Körper bewegt sich entlang der folgenden Bahnkurve:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Bestimmen Sie $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ und zeichnen Sie $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ ein.

Aufgabe 148

Eine Kugel der Masse m wird auf geradem Weg von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ angehoben. Welche Arbeit W muss dazu verrichtet werden? Die Koordinaten sind in Metern angegeben; die dritte Koordinate beschreibt die Höhe. Es wirkt ein homogenes Schwerfeld mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ in negativer Richtung der dritten Achse. Die Kugel wird langsam mit konstanter Geschwindigkeit angehoben; Reibung wird vernachlässigt. Geben Sie die Arbeit der hebenden Kraft in Abhängigkeit von m an.

Aufgabe 149

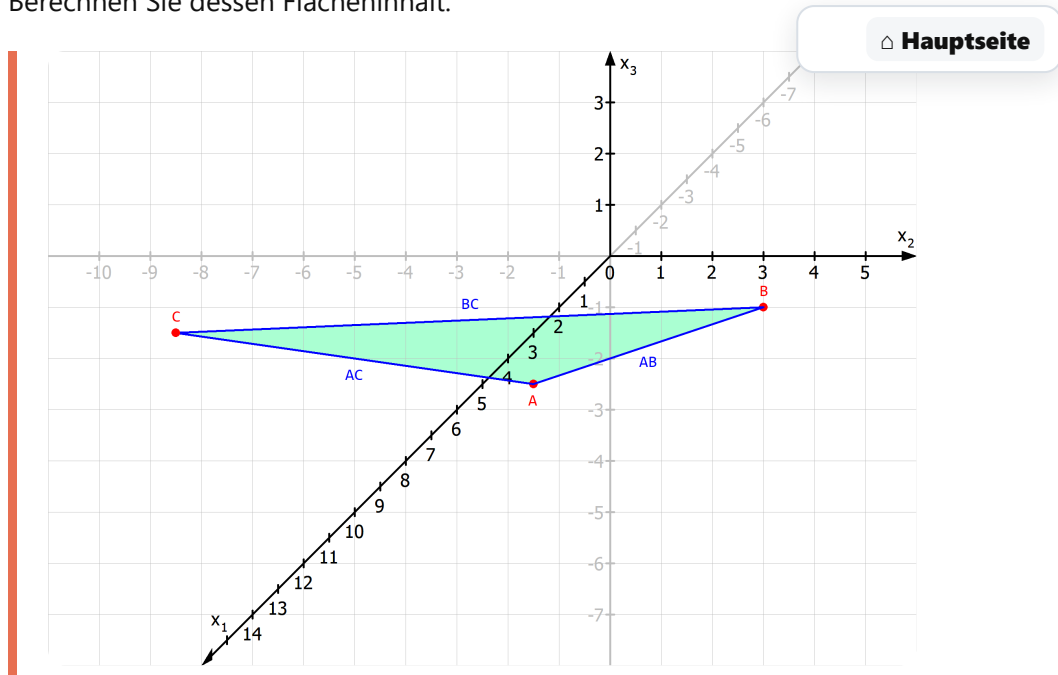
Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Sind diese Vektoren linear abhängig?

Aufgabe 150

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sei das Dreieck ABC mit A (3| 0| -1), B (2| 4| 0) und C (5| -6, 1) gegeben.

a. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.



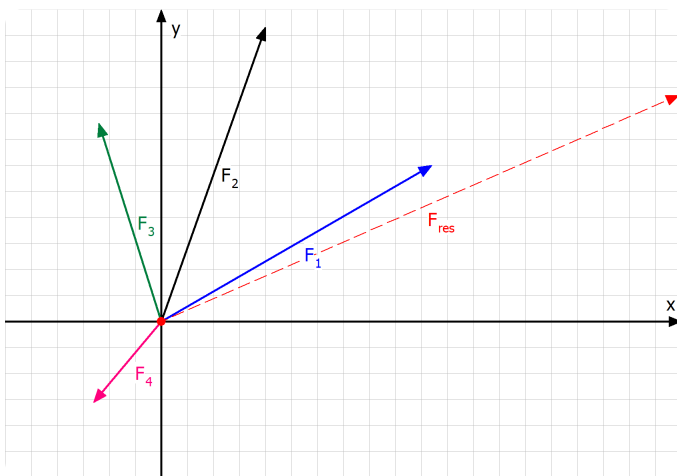
b. Ein Objekt, dass sich nur in x-Richtung fortbewegen kann, wird mit einer konstanten Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ N}$ gezogen. Wie groß ist die Arbeit W , die verrichtet wurde, wenn das Objekt in positiver x-Richtung um 5 LE bewegt wurde?

Es gilt Arbeit = $\langle \text{Kraft}, \text{Weg} \rangle$.

Aufgabe 151

Berechnen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ nach Betrag und Richtung

(Richtungswinkel α jeweils mit der positiven x-Achse).



$$F_1 = 120 \text{ N}, \alpha = 30^\circ$$

$$F_2 = 100 \text{ N}, \alpha = 70^\circ$$

$$F_3 = 80N, \alpha = 108^\circ$$

$$F_4 = 40N, \alpha = 230^\circ$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 152

Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normieren Sie die beiden Vektoren.

Aufgabe 153

Vereinfachen Sie den folgende Vektorausdruck:

$$\frac{1}{2} \left(\vec{a} \times \left(2\vec{b} + 3\vec{a} \right) \right) - \left(\vec{b} \times \vec{a} \right)$$

Aufgabe 154

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die einen Winkel von 30° einschließen. Die Länge von $\vec{a}$ sei 3, die Länge von $\vec{b}$ sei $\sqrt{3}$.

Berechnen Sie $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a}$

1 BF/LF Geraden

Aufgabe 155

Gegeben sei eine Gerade g in Parameterform. Wandeln Sie diese in Koordinatenform um.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 156

Gegeben seien die Geraden

$$g_1: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2: x_1 - x_2 = 1.$$

a. Geben Sie von den beiden Geraden die Hessesche Normalform an

[Hauptseite](#)

b. Wie lautet der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden?

c. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden.

Aufgabe 157

Gegeben sei das Viereck ABCD mit den Eckpunkten A (0|0|0), B (-3|1|4), C (2|-4|4) und D (5|-5|0).

a. Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

b. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und des Radius eines Kreises mit dem Durchmesser [AC] an.

Aufgabe 158

Im $\mathbb{R}^3$ seien eine Gerade g und ein Punkte A, welcher nicht auf der Geraden g liegt, gegeben.

Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweiter Punkte B und C der Geraden g , die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.

Aufgabe 159

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g in Parameterform, die durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

und $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft. Überprüfen Sie, ob der Punkt $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegt.

Aufgabe 160

Gegeben seien die Geraden g und h wie folgt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a. Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E , die durch die beiden Geraden aufgespannt wird.

b. Bestimmen Sie auf der Geraden g zwei verschiedene Punkte A und B so, dass der Abstand zwischen A und S und zwischen B und S jeweils 12 ist. Dabei bezeichnet S den Schnittpunkt der Geraden g und h . Bestimmen Sie zunächst S.

c. Bestimmen Sie alle Punkte auf der x-Achse, die von der Ebene E den Abstand 3 haben.

[Hauptseite](#)

1 BF/LF Ebenen

Aufgabe 161

Die Ebene E enthält folgende Schnittpunkte (Spurpunkte) mit den Koordinatenachsen:

A (3|0|0), B (0|-3|0) und C (0|0|3).

Zeichnen Sie die Ebene in ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie die Ebenengleichungen E^p , E^k und E^n .

Aufgabe 162

Gegeben seien die Ebenen $E_1 : 6x_1 - x_2 - 4x_3 = 12$ und $E_2 : -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6$. Die Punkte A (2|0|0) und B (0|0|-3) liegen in beiden Ebenen.

- Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind.
- Ermitteln Sie die Koordinaten eines von A und B verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt.
- In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht. Geben sie diese Änderung mit Begründung an.

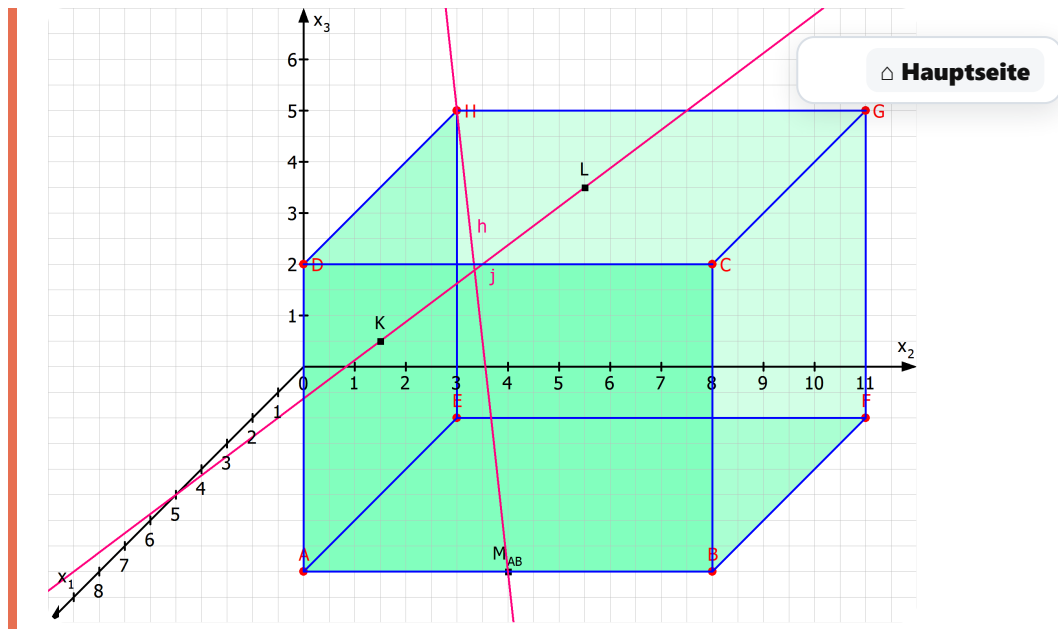
1 BF/LF Gegenseitige Lage

Aufgabe 163

Die schwarz gezeichneten Punkte sind jeweils die Mittelpunkte einer Seitenfläche bzw. einer Kante.

Folgende Punkte sind gegeben: A (2|1|-3), B (2|9|-3), D (2|1|3) und E (-4|1|-3)

- Stellen Sie die Parametergleichung der Geraden h und j auf.
- Untersuchen Sie außerdem die gegenseitige Lage der beiden Geraden.



Aufgabe 164

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 165

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1|1|1)$, $B(7|7|3)$, $C(3|5|-1)$ und $Q(4|0|-16)$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass die Punkte A , B und C ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $[AB]$ bilden.
- Bestimmen Sie den Winkel an der Spitze des Dreiecks ABC .
- Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ?

Aufgabe 166

Eine Ebene E sei gegeben durch den Punkt $P(0|3|1)$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie eine Gerade g , die senkrecht auf der Ebene E steht und durch den Punkt $Q(6|5|2)$ geht.
- Welche Koordinaten hat der Durchstoßpunkt S der Geraden g durch die Ebene E ?

c. Welchen Abstand hat der Punkt Q von der Ebene E?

[Hauptseite](#)

d. In welchen Punkten durchstoßen die Koordinatenachsen die Ebene E?

e. Bestimmen Sie die Schnittgeraden der Ebene E mit der x_1x_2 -Ebene, mit der x_1x_3 -Ebene und mit der x_2x_3 -Ebene.

1 BF/LF Abstandsberechnungen

LF Abstand Geraden und Ebenen

Aufgabe 167

Gegeben seien die Ebenen E und F.

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a. Zeigen Sie, dass die Ebenen parallel sind.

b. Bestimmen Sie außerdem den Abstand der Ebenen.

Aufgabe 168

Gegeben seien die Geraden g und h.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 169

Gegeben seien die Ebene E und die Gerade g.

$$E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

[Hauptseite](#)

- Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E und g.
- Bestimmen Sie außerdem den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E.

Aufgabe 170

Die Punkte A, B und C aus Aufgabe 2.4.3 bestimmen die Ebene E_1 .

- Geben Sie die Gleichung der Ebene E_1^n in Normalenform an. (Mögliches Ergebnis: $E: 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 13 = 0$).
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q von der Ebene E_1^n .
- Liegen der Koordinatenursprung und der Punkt Q auf verschiedenen Seiten der Ebene E_1^n oder nicht?
- Geben sie eine Gleichung E_2 an, die zu E_1 parallel ist und den Punkt Q enthält.
- Zeigen Sie, dass die Gerade g der Ebene E_2 angehört.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

BF/LF Abstand Punkt zu Ebene

Aufgabe 171

Gegeben sei der Punkt P (3|u|0) und die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$.

Bestimmen Sie u so, dass P den Abstand 5 LE von E hat.

1 BF/LF Berechnungen an Ebenen

Aufgabe 172

Gegeben seien die Ebene E und die Gerade g.

$$E: 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$$

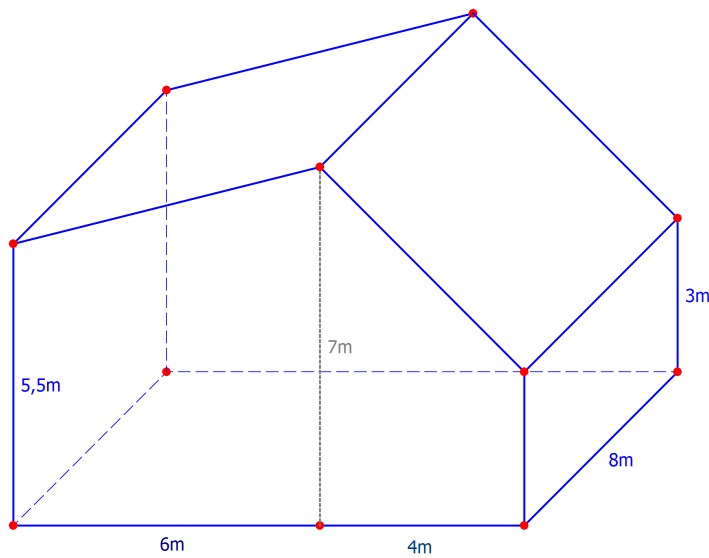
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen der Ebene E und der Geraden g an.

Aufgabe 173

[Hauptseite](#)

Die Skizze zeigt ein Haus mit rechteckiger Grundfläche und einer Höhe von 7m.



- Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Dachflächen.
- Berechnen Sie jeweils die Größe der Winkel zwischen einer Dachfläche und der angrenzenden Hauswand.

Aufgabe 174

Gegeben seien die Gerade g und die Ebene E .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- Bestimmen Sie den Abstand, den E zum Ursprung hat.
- Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel.
- Die Ebene F verläuft durch den Punkt $A(-5|0|1)$ und ist orthogonal zur Geraden g . Welche besondere Lage hat F im Koordinatensystem? Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden.

Aufgabe 175

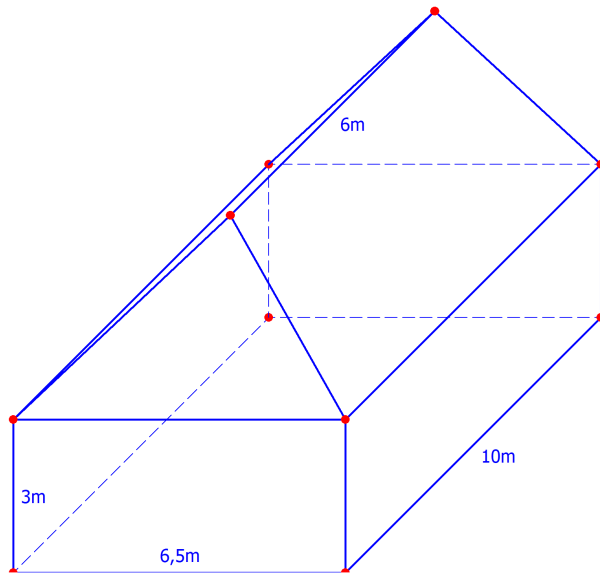
Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E_1 und E_2 .

$$E_1: x_2 = 3 \setminus \setminus E_2: x_1 = 5$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 176

Das Haus ist 6m hoch. Die Giebelbreite beträgt ebenfalls 6m. Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen der vorderen Dachfläche und der vorderen Hauswand. Legen Sie dazu zunächst den Ursprung des Koordinatensystems fest.



Aufgabe 177

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen

$$E_1: 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3 = 0$$

und

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \setminus \text{gegeben.}$$

Ebenso der Punkt P (1 | -3 | -8).

- Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.
- Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E_2 liegt und von der Ebene E_1 den Abstand 6 hat.
- Vom Punkt P wird das Lot auf die Ebene E_1 gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F.
- Ermitteln Sie das Teilverhältnis, in dem der Punkt T ($t_1 | t_2 | -2$) die Strecke [PF] teilt, und die Koordinaten t_1 und t_2 .
- Geben Sie (zum Beispiel unter Verwendung der Lotebene durch F und s) eine Gleichung der Geraden h an, die durch den Punkt F verläuft und auf der Schnittgeraden s (Teilaufgabe a) senkrecht steht.

f. Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden h und ϵ ?

[Hauptseite](#)

Aufgabe 178

Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene, die durch den von P bestimmten Punkt geht und senkrecht auf der Geraden g steht.

Es gilt:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebenen.

Aufgabe 179

Gegeben sie die Ebene $E_1: 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 13 = 0$ und der Punkt $Q(4|0|-16)$.

a. 1) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_2 an, die zur Ebene E_1 parallel ist und den Punkt Q enthält.

b. Zeigen Sie, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Ebene E_2 angehört.

Aufgabe 180

Gegeben seien die vier Punkte A (6|3|-5), B (2|-1|3), C (1|2|4) und D (-7|4|-1).

a. Liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden?

b. Liegen die Punkte A, B, C und D in einer Ebene?

Aufgabe 181

Gegeben seien die Ebene $E: 2x - y + z + 1 = 0$, die Gerade g durch die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und der Punkt } P = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. Zeigen Sie, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt.

b. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene E.

c. Bestimmen Sie den Fußpunkt und die Länge des von P auf die Ebene E gefällten Lotes.

d. Bestimmen Sie den von der Geraden g und der Ebene E eingeschlossenen Winkel

[Hauptseite](#)

Aufgabe 182

Gegeben sei ein Tetraeder $ABCD$ mit den folgenden Eckpunkten:

$A(1|0|1)$, $B(1|3|4)$, $C(5|-1|2)$ und $D(6|2|1)$.

- Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck ist.
- Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E an, die das Dreieck ABC enthält.
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E .
- Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders $ABCD$.
- Bestimmen Sie eine Gerade g , die durch den Punkt $P(-1|4|-5)$ geht und senkrecht zur Ebene E steht.
- Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E .

Aufgabe 183

Gegeben seien die Ebene $E: x - 2y + z = 24$ und der Punkt $P(2|-2|1)$.

Die Ebene teilt den $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume. Überprüfen Sie, ob der Punkt P und der Ursprung im gleichen Halbraum liegen.

1 LF Spiegelung

Aufgabe 184

Der Punkt $P(5|-2|1)$ soll an der Gerade g gespiegelt werden.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 185

Prüfen Sie, ob die Punkte $A(5|7|7)$ und $B(-3|-5|3)$ symmetrisch zu der Ebene E liegen.

$$E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$$

Aufgabe 186

[Hauptseite](#)

Der Punkt A $(4|-3|7)$ soll an der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ gespiegelt werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A'.

Aufgabe 187

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt P $(-3|0|2)$.

- Zeigen Sie, dass der Punkt nicht in der Ebene liegt.
- Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Bildpunkt P'. Berechnen Sie die Koordinaten von P'.

1 ST Hyperebenen

Aufgabe 188

Gegeben seien zwei affine Ebenen im 4-dimensionalen Raum:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Ebenen.

Aufgabe 189

Eine Hyperebene im n-dimensionalen Raum hat die Form

$$H: \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{u}_{n-1} \right\}, (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R})$$

Zeigen Sie:

- Im eindimensionalen Raum stellt jeder Punkt eine Hyperebene dar.
- Im zweidimensionalen Raum stellt jede Gerade eine Hyperebene dar.

1 W Grundlagen

Aufgabe 190

In einer Schulklasse sind insgesamt 30 Schüler. Davon 16 Mädchen und 14 Jungen. 50% der männlichen Schüler sind größer als 1,80m und 12,5% der weiblichen. Sind die beiden Ereignisse E: „Der Schüler ist männlich“ und F: „Der Schüler ist größer als 1,80“ stochastisch unabhängig?

Aufgabe 191

A, B und C seien Ereignisse, P deren Wahrscheinlichkeit.

Beweisen Sie die Formel $P(A \cup B \cup C) = P(A \text{ „oder“ } B \text{ „oder“ } C) =$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

durch dreimaliges Anwenden von $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Aufgabe 192

Meine Frau hat 23 Hüte, 52 Kleider, 19 Handtaschen, 61 Paar Schuhe und 13 Armbanduhren. Wie viele verschiedene Outfits kann sie kombinieren?

Aufgabe 193

Geben Sie jeweils die relative Häufigkeit an:

- a. Jeder neunte ... (als Bruch)
- b. 7 von 250 ... (als Dezimalzahl)
- c. 24% von allen... (als Bruch)
- d. Dreiachtel aller ... (in Prozent)

Aufgabe 194

Nach den Axiomen von Kolmogorow müssen Wahrscheinlichkeiten folgende Eigenschaften besitzen (Es seien E und F Ereignisse und S die Ergebnismenge):

- i. $P(E) \geq 0$ (Positivität)
- ii. $P(S) = 1$ (Normiertheit)

- iii. Wenn für zwei Ereignisse E und F gilt, dass $E \cap F = \{ \}$, dann gilt: $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ (Additivität)

[Hauptseite](#)

Dann nennt man $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit von E.

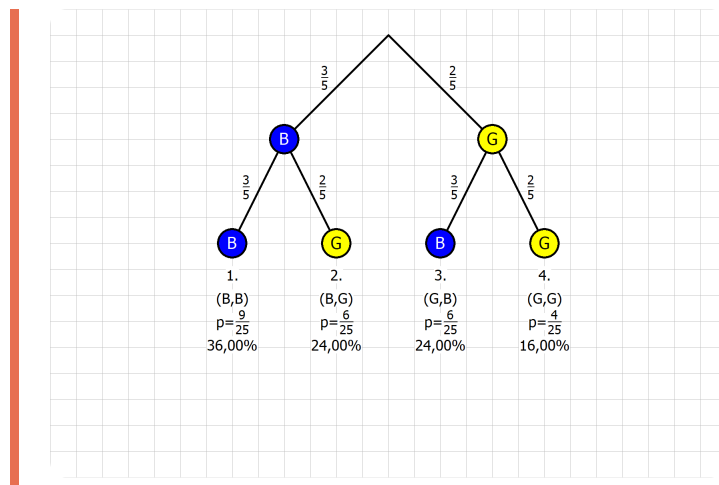
Leiten Sie aus den Kolmogorow-Axiomen her:

- Für jedes Ereignis E gilt: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.
- Für jedes Ereignis E gilt: $P(E) \leq 1$.

Aufgabe 195

In einem Behälter befinden sich 5 Kugeln: 3 blaue und 2 gelbe. Es werden nacheinander 2 Kugeln entnommen. Es sei E das Ereignis „Die erste Kugel ist blau“ und F das Ereignis „Die zweite Kugel ist gelb“.

- Die erste Kugel wird nach dem Ziehen zurückgelegt. Weisen sie nach: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.



- Die erste Kugel wird nach dem Ziehen nicht zurückgelegt. Weisen Sie nach: $P(E \cap F) \neq P(E) \cdot P(F)$.
- Berechnen Sie $P_E(F)$.

1 W/BF Mit Wahrscheinlichkeiten rechnen

Aufgabe 196

Urs trifft beim Basketball 60% aller Würfe. Im heutigen Spiel bekommt er drei Freiwürfe. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und ordnen Sie den genannten Ereignissen Ihre Wahrscheinlichkeit zu.

A: „Er trifft mindestens einmal.“

B: „Er trifft mindestens zweimal.“

Aufgabe 197

[Hauptseite](#)

In einem fiktiven Theater namens BACCHUS gibt es 10 Sitzreihen mit jeweils 20 Plätzen. Jeder Sitzplatz trägt einen eindeutigen Code aus einem Reihensbuchstaben A bis J und einer Platznummer 1 bis 20, zum Beispiel F-14. Zum 100-jährigen Jubiläum am 5.10.2012 verschenkt das Theater alle Tickets, deren Reihensbuchstabe im Namen BACCHUS vorkommt oder deren Platznummer 5, 10 oder 12 ist. Ein Sitzplatz wird zufällig ausgewählt; alle 200 Plätze sind gleich wahrscheinlich.

Definieren Sie A als das Ereignis „Der Reihensbuchstabe kommt im Namen BACCHUS vor“ und B als das Ereignis „Die Platznummer ist 5, 10 oder 12“. Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein kostenloses Ticket.

	A	$\bar{A}$	
B			30
$\bar{B}$			
		140	200

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein an diesem Tag zufällig ausgewähltes Ticket eines der verschenkten Tickets?

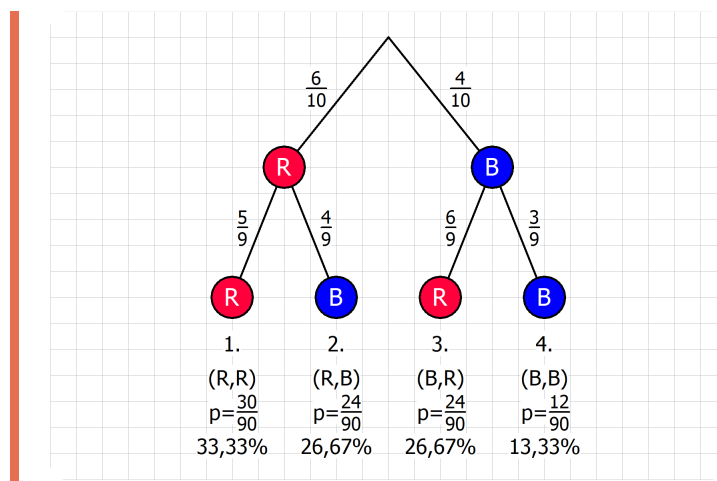
Aufgabe 198

In zwei Urnen U_1 und U_2 seien Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1 : Sechs rote und vier blaue Kugeln

U_2 : Eine rote und vier blaue Kugeln

- a. Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln die gleiche Farbe haben.



- b. Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel sei rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel aus der Urne U_1 stammt.

[Hauptseite](#)

Aufgabe 199

Eine homogene Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir in diesem Zufallsexperiment zunächst zweimal „Zahl“ und dann „Wappen“?

Aufgabe 200

Man geht davon aus, dass bei 100.000 Geldscheinen 200 Fälschungen dabei sind. Eine Bank hat deswegen einen Prüfautomaten eingerichtet. Bei einem falschen Schein blinkt der Automat. Leider ist der Automat nicht absolut zuverlässig. Einen falschen Schein erkennt er mit 95%iger Sicherheit. Umgekehrt gibt er bei einem echten Schein in 10% der Fälle einen falschen Blinkalarm.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Automat bei einem zufällig ausgewählten Schein blinkt.
- Bei der Prüfung eines Scheins blinkt der Automat. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schein gefälscht ist?

Aufgabe 201

Ein Betrieb erhält seine Bauteile von zwei verschiedenen Firmen, und zwar 75% von Firma A und 25% von Firma B. Eine Stichprobe hat ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig entnommenes Teil intakt ist und von Firma B stammt, $p=0,23$ beträgt.

Wieviel Prozent der von B gelieferten Bauteile sind intakt?

Aufgabe 202

Die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet sei 50%. Die Wahrscheinlichkeit, dass die S-Bahn pünktlich fährt, beträgt 40%. Beide Ereignisse seien unabhängig voneinander.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet und die S-Bahn pünktlich fährt?

Aufgabe 203

In einem Hotel sind noch vier Zimmer frei. Am Empfang warten sechs Gäste, die alle ein eigenes Zimmer haben wollen. Die vier Zimmer sind unterscheidbar und werden zufällig an vier verschiedene Gäste vergeben; alle möglichen Zuordnungen sind gleich wahrscheinlich.

- Auf wie viele Arten können die Zimmer verteilt werden?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält ein bestimmter, vorab ausgewählter Gast ein Zimmer?

- c. Die Hotelfachfrau tippt auf die vier, die ein Zimmer bekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät sie falsch?

[Hauptseite](#)

Aufgabe 204

An einem Laufwettbewerb nehmen 3 Läufer teil: Läufer A, Läufer B und Läufer C. Deren Siegeschancen verteilen sich im Verhältnis 5 : 3 : 1.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- a. Läufer C,
- b. Läufer A oder B gewinnt.

1 BF Erwartungswert und Standardabweichung

Aufgabe 205

Ein Glücksrad mit den Zahlen von 1 bis 16 in gleichgroßen Sektoren wird gedreht. Tom und Lea verabreden folgendes Spiel: Tom zahlt Lea 3€, wenn die Sektornummer eine Primzahl

ist. Lea zahlt an Tom 2€, wenn die Sektornummer gerade ist. Erstellen Sie einen Gewinnplan für Lea und entscheiden Sie, ob das Spiel fair ist.

Aufgabe 206

Verteilungen von Zufallsgrößen werden durch Parameter charakterisiert.

In den Klassen 8a und 8b, die jeweils aus 25 Schülern bestehen, wurden die Leistungen jedes Schülers im Hochsprung ermittelt. Die Zufallsgröße A und B ordnen jeweils einem zufällig ausgewählten Schüler der Klasse 8a und 8b seine Sprunghöhe in Metern zu. Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt $E(A) = E(B)$, für die Standardabweichung $\sigma(A) < \sigma(B)$.

- a. Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilungen der Sprunghöhe bedeuten.
- b. Eine Zufallsgröße X kann fünf verschiedene Werte annehmen. Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X so an, dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert dieser Zufallsgröße liegt.

Aufgabe 207

Ein Würfel wird 100-mal geworfen. Dabei sei die Zufallsvariable X die Anzahl der Sechsen, die geworfen werden.

- a. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

- b. Bestimmen Sie das 2σ -Intervall. Vergleichen Sie das 2σ -Intervall mit dem Näherungswert, den die Sigma-Regel liefert.

[Hauptseite](#)

Aufgabe 208

Bei dem Glücksspiel „Enten fangen“ schwimmen 100 Plastikenten im Wasser, die verdeckt die Ziffern 00 bis 99 tragen. Pro Spiel wird eine Plastikente aus dem Wasser geangelt. Folgender Gewinnplan ist vorgegeben:

Doppelziffer 00: 10€

Doppelziffer ungleich 00: 5€

Endziffer 0 außer 00: 3€

Welchen Einsatz muss der Spielbudenbesitzer verlangen, damit er im Durchschnitt pro Spiel 50 Cent verdient?

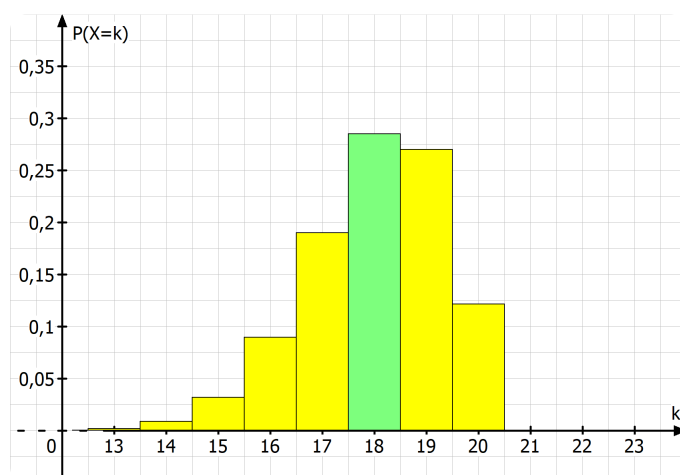
1 BF Binomialverteilung

Aufgabe 209

- Leiten Sie die Formel von Bernoulli her.
- Welcher Schätzer bietet sich für den Parameter p an?

Aufgabe 210

Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit den Parametern $n=20$ und $p=0,9$.



Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten. Schätzen Sie diese vorher ab.

- $P(X = 16)$
- $P(X \geq 18)$
- $P(x < 14)$

d. $P(15 \leq X < 18)$

e. $P(X \geq 1)$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 211

An einer Maschine, an der Bauteile hergestellt werden, beträgt der Anteil von Bauteilen minderer Qualität erfahrungsgemäß 5%. Zur Qualitätsprüfung werden der Tagesproduktion von 20.000 Stück Stichproben im Umfang von 5 bis 200 Bauteilen entnommen. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der fehlerhaften Bauteile in einer Stichprobe vom Umfang n . Folgende Ereignisse werden betrachtet: Modellieren Sie die Anzahl fehlerhafter Bauteile näherungsweise binomialverteilt mit $p = 0,05$.

E: „Von 18 entnommenen Bauteilen sind genau 2 fehlerhaft.“

F: „Von 10 Bauteilen ist weniger als die Hälfte von minderer Qualität.“ Berechnen Sie $P(E)$ und $P(F)$ mit dem Binomialmodell und begründen Sie, warum die Näherung trotz der Entnahme ohne Zurücklegen geeignet ist.

Aufgabe 212

Laut Robert-Koch-Institut lag die Krankheitshäufigkeit von Diabetes in Deutschland im Jahr 2012 bei 7,2%. Wie groß muss eine Gruppe mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% eine Person Diabetes hat?

Aufgabe 213

Bei einem Lese-Wettbewerb erhält jeder Teilnehmer ein kleines Präsent. Einige dieser Päckchen enthalten besonders begehrte Geschenke. Wie groß muss der Anteil der Präsente mit besonderen Geschenken sein, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% in mindestens einem von 20 Päckchen zu finden sind?

Aufgabe 214

Für welchen Wert von p erreicht die Standardabweichung σ bei einer Binomialverteilung ihr Maximum? Ermitteln Sie rechnerisch.

Aufgabe 215

Der Schulleiter einer Schule nimmt für das neue Schuljahr 95 Schüleranmeldungen an, obwohl er nur 80 Plätze zu vergeben hat. Nach seiner Erfahrung melden sich 15% der Schüler vor Schulbeginn wieder ab.

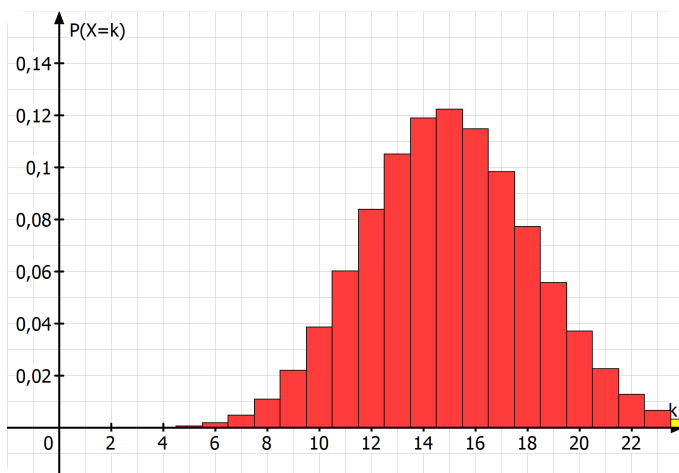
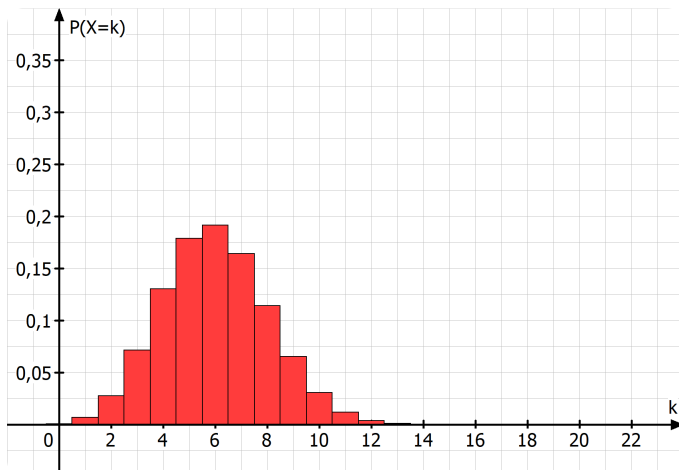
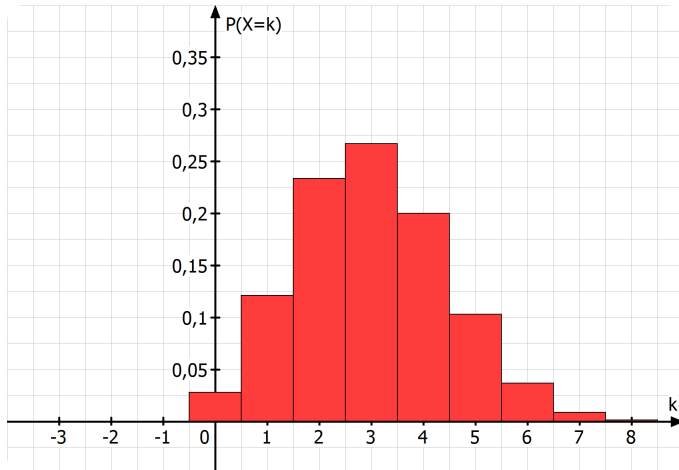
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er zu viele Anmeldungen angenommen hat.
- Bestimmen Sie die Anzahl der Anmeldungen, die der Schulleiter annehmen sollte, damit die Wahrscheinlichkeit, dass er zu viele Anmeldungen angenommen hat, kleiner als 5% ist.

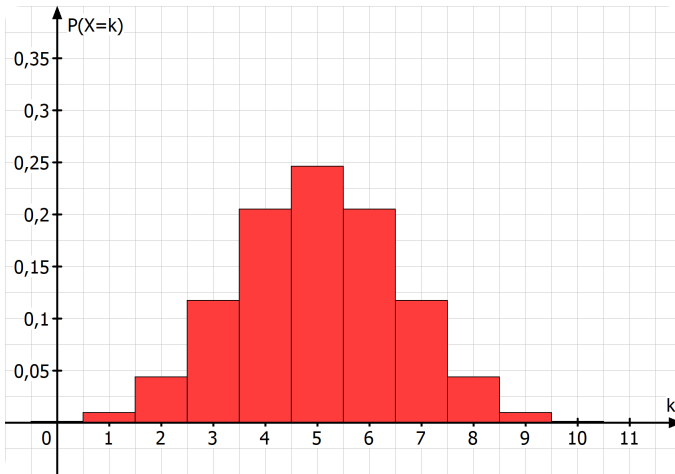
Aufgabe 216

[Hauptseite](#)

Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit den Parametern $n=10$ und $p=0,3$.

- Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von X darstellt. Begründen Sie ihre Auswahl.
- Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 < X < 7)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 5)$ an.





Aufgabe 217

Eine nicht ideale (z.B. verbeulte) Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, sei p .

- a. Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse E und F an:

E: Bei fünf Würfeln fällt genau dreimal „Wappen“

F: Bei fünf Würfeln fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfeln zweimal.

- b. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfeln dreimal „Wappen“ fällt, sei 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“.

Aufgabe 218

Bei Polizeikontrollen stellt man fest, dass 15% der Fahrer während der Fahrt mit ihrem Handy beschäftigt sind. Um die Öffentlichkeit auf diese Gefahr aufmerksam zu machen, will man mindestens 3 Fahrer erwischen.

Berechnen Sie die Mindestanzahl der zu kontrollierenden Fahrer, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens 3 Verkehrssünder gefunden werden.

Aufgabe 219

Für einen Losverkauf sollen 2000 Lose erstellt werden. Man legt fest, dass ein Käufer bei einem Kauf von 10 Losen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% ein Gewinnlos ziehen soll.

- a. Ermitteln Sie, wie viele Gewinnlose es geben muss, damit die Forderung erfüllt werden wird.
- b. Berechnen sie algebraisch exakt.

Aufgabe 220

[Hauptseite](#)

Ein Bauer liefert Eier. Aus Erfahrung weiß man, dass 60% braun sind, sonst weiß.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einem Karton mit 10 Eiern von jeder Farbe mindestens drei Eier?

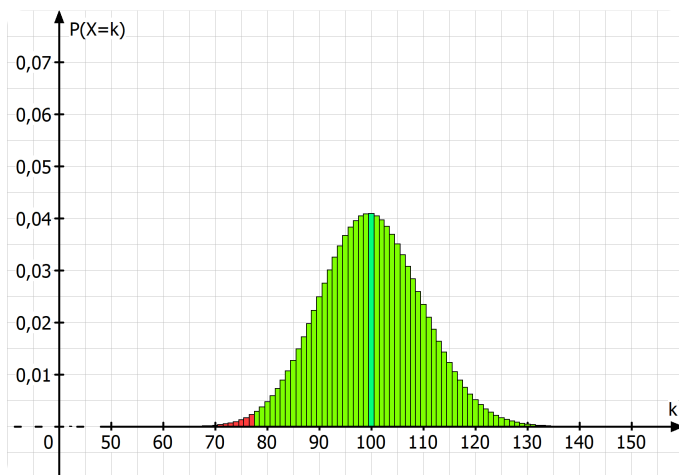
1 LF Signifikanztests

Aufgabe 221

Ein Unternehmen bringt ein neues Wundermittel auf den Markt und behauptet, dass 40% der Erkrankten damit geheilt werden. Bei der Zulassung des Wundermittels treten Zweifel auf. Es wird deshalb ein Test an 25 Personen vorgenommen. Man glaubt der Behauptung, wenn mindestens 8 dieser Erkrankten geheilt werden. Berechnen Sie den Fehler 1. Art. Dabei sei X die Anzahl der geheilten Personen und X binomialverteilt mit $n = 25$ und Heilungswahrscheinlichkeit p . Verwenden Sie $H_0: p \geq 0,40$ und $H_1: p < 0,40$. H_0 wird bei $X \leq 7$ verworfen. Berechnen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art unter H_0 ; diese wird am Rand $p = 0,40$ angenommen.

Aufgabe 222

Der Vorsitzende einer Partei behauptet, seine Partei werden bei den nächsten Wahlen die 5%-Hürde nehmen. Es wird ein Meinungsforschungsinstitut beauftragt, eine repräsentative Befragung mit 2000 Wählern durchzuführen. Bestimmen Sie für die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,05$ die Entscheidungsregel für diesen Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 1%.



Aufgabe 223

Vor einem Stadion befindet sich eine Torwand mit zwei Löchern. Jürgen ist ein geübter Torwand-Schütze und trifft, wenn er auf das obere Loch zielt, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%. Für das untere Loch hat er sogar eine Wahrscheinlichkeit von 40%.

a. Wie oft muss Jürgen auf das untere Loch mindestens Schießen, damit er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal trifft?

[Hauptseite](#)

b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jürgen, wenn er zuerst dreimal auf das untere und dann dreimal auf das obere Loch schießt, genau einmal sein Ziel trifft.

Aufgabe 224

Eine Werbeagentur behauptet, dass sie den Bekanntheitsgrad eines Produkts auf über 70% steigern könnte. Dazu wird ein Test ausgeführt, bei dem 200 zufällig ausgewählte Personen befragt werden. Die Bezahlung der Agentur hängt vom Erfolg ab.

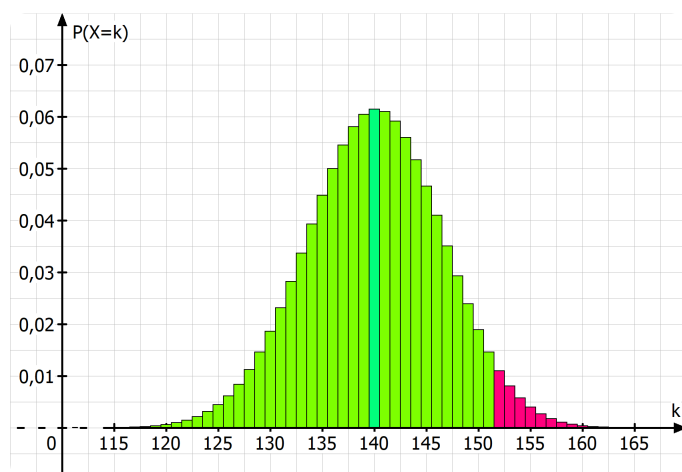
Der Auftraggeber wählt entsprechend als Nullhypothese:

$$H_0 : p \leq 0,7.$$

Diese Nullhypothese soll auf ein Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

a. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für diesen Test.

b. Bestimmen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit, also den Fehler 1. Art.



c. Warum macht es aus Sicht des Produktherstellers Sinn, die Nullhypothese derart zu wählen?

Aufgabe 225

Bei einem linksseitigen Test mit der Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,4$ und der Alternative $H_1 : p < 0,4$ erhält man mit dem WTR folgende Tabellenwerte:

	x	P
1	30	0.0247828
2	31	0.0398478
3	32	0.0615039
4	33	0.0912536

Das Signifikanzniveau sei 5%. Der Stichprobenumfang sei $n=100$. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und die Entscheidungsregel.

[Hauptseite](#)

Aufgabe 226

Bei einem rechtseitigen Test mit der Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,7$ und der Alternative $H_1 : p > 0,7$ erhält man mit dem WTR folgende Tabellenwerte:

	x	P
1	150	0.949408
2	151	0.964052
3	152	0.975067

Das Signifikanzniveau sei 5%. Der Stichprobenumfang sei $n=200$. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und die Entscheidungsregel.

1 LF Stetige Verteilungsfunktionen

Aufgabe 227

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 4$ und $\sigma = 2$, $I(-\infty; 3)$

a. Bestimme $P(X < 3)$.

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 2$ und $\sigma = 0,5$, $I(1,5; 2,5)$

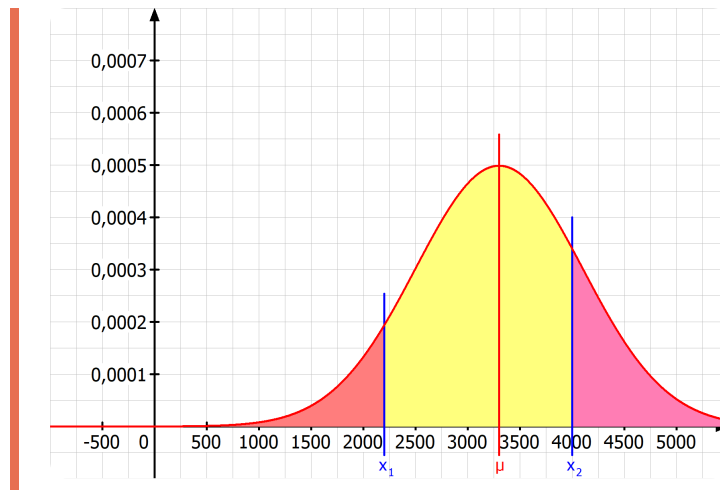
b. Bestimme $P(1,5 < X < 2,5)$.

Aufgabe 228

Das Geburtsgewicht eines Jungen sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 3300$ und $\sigma = 800$.

a. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen mit weniger als 2200g Geburtsgewicht.

b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen mit mehr als 4000g Geburtsgewicht.



[Hauptseite](#)

- c. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen, dessen Geburtsgewicht um mehr als 300g vom Erwartungswert abweicht.

Aufgabe 229

Für eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $E(X) = \mu = 3$ und der Varianz $V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{4}$ berechne man die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- $P(2,5 < X \leq 4)$
- $P(X - \mu > -3\sigma)$

1 ST Konfidenzintervalle

Aufgabe 230

Eine Stichprobe des Umfangs $n = 1000$ enthält 40 fehlerhafte Teile. Für den unbekannten Parameter p der binomialverteilten Grundgesamtheit soll ein Vertrauensintervall bestimmt werden. Dabei soll für das Konfidenzniveau gelten: $\gamma = 0,95$. Verwenden Sie das approximative Wald-Intervall $\hat{p} \pm 1,96 \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$ mit der relativen Häufigkeit $\hat{p} = 40/1000$.

1 BF/ST Matrizen

ST Matrizenoperationen

Aufgabe 231

Gegeben seien die Matrizen A und B. Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, also dass $A \bullet B \neq B \bullet A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 232

Gegeben sei die Matrix A. Berechnen Sie A^2 , A^3 , A^4 . Leiten Sie daraus A^n her.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 233

Die Matrizen A und B seien invertierbar und vom passenden Format. Bestimmen Sie die Matrix X. E bezeichnet die Einheitsmatrix passender Größe. Für Teilaufgabe 1 sei zusätzlich $A - 2E$ invertierbar.

a. $X \cdot A - A = 2 \cdot X$

b. $A^{-1} \cdot X \bullet A - A^{-1} \bullet B = A^{-1}$

Aufgabe 234

Bestimmen Sie die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ inverse Matrix A^{-1} .

Aufgabe 235

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie X aus:

$$E - 2 \cdot A + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 236

Man kann zeigen, dass für zwei quadratische Matrizen gilt: $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Rechnen Sie nach für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

ST Prozesse

Aufgabe 237

Aus den zwei Rohstoffen R_1 und R_2 werden die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus zwei Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Pro Mengeneinheit Z_1 werden 2 ME R_1 und 1 ME R_2 benötigt, pro ME Z_2 werden 1 ME R_1 und 3 ME R_2 benötigt. Pro ME E_1 werden 1 ME Z_1 und 2 ME Z_2 benötigt, pro ME E_2 werden 3 ME Z_1 und 1 ME Z_2 benötigt. Ordnen Sie in den Verbrauchsmatrizen die eingesetzten Güter den Zeilen und die erzeugten Güter den Spalten zu.

- Geben Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix an.
- Bestimmen Sie die Rohstoffmengen, wenn 10 Mengeneinheiten von Z_1 und 5 Mengeneinheiten von Z_2 produziert werden sollen.
- Welche Rohstoffmengen werden pro Mengeneinheit E_1 und E_2 benötigt?

Aufgabe 238

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 18 & 15 \end{pmatrix}$$

- Mit wieviel unterschiedlichen Rohstoffen wurde produziert?
- Ein Kunde bestellt 105 ME von E_1 und 80 ME von E_2 . Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?
- Im Lager befinden sich noch 52 ME von Z_1 und 84 ME von Z_2 . Wie viele Endprodukte lassen sich davon herstellen? Bestimmen Sie die Produktionsmengen von E_1 und E_2 so, dass beide Lagerbestände vollständig verbraucht werden.
- Bestimmen Sie für einen Auftrag über 20 ME von E_1 und 30 ME von E_2 die variablen Kosten, wenn gilt:

$$\vec{k}_R = (1 \quad 0,5 \quad 0,6), \vec{k}_Z = (1,4 \quad 1,8), \vec{k}_E = (2,5 \quad 3)$$

Aufgabe 239

[Hauptseite](#)

Eine Firma stellt Mitarbeitern Firmenfahrzeuge zur Verfügung: Fahrzeuge vom Typ A, B und C. Am Ende jeden Jahres kann das Fahrzeug gewechselt werden. Mitarbeiter, die ein Fahrzeug A hatten, wechseln zu 10% zu Typ B und 20% zu Typ C. Mitarbeiter, die ein Fahrzeug B hatten, wechseln zu 30% zu A und 40% zu C. Alle Mitarbeiter, die ein Fahrzeug C hatten, nehmen dies auch im nächsten Jahr.

Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P , den Fixvektor $\vec{g}$ und die Grenzmatrix G .

Aufgabe 240

Bei einer Tierart legen die geschlechtsreifen Weibchen Eier. Aus diesen entwickeln sich Jungtiere, die noch nicht geschlechtsreif sind. Nach diesem Modell legt jedes Weibchen einmal im Leben 50 Eier, von denen nur 5% zu jungen Tieren heranwachsen. 20% der jungen Tiere werden überleben und werden geschlechtsreif. Ein Zeitschritt entspricht einem Jahr. Betrachtet werden ausschließlich weibliche Individuen beziehungsweise Eier, aus denen weibliche Tiere hervorgehen können; die Angabe 50 Eier bezieht sich auf diese Eier. Eier werden innerhalb eines Zeitschritts mit Wahrscheinlichkeit 0,05 zu weiblichen Jungtieren. Jungtiere werden innerhalb des folgenden Zeitschritts mit Wahrscheinlichkeit 0,20 zu geschlechtsreifen Weibchen. Jedes geschlechtsreife Weibchen legt im nächsten Zeitschritt 50 Eier und stirbt danach. Es gibt kein Verbleiben in einem Zustand und keine weiteren Übergänge. Verwenden Sie die Zustandsreihenfolge (Eier, Jungtiere, Weibchen).

- Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm und geben Sie die Übergangsmatrix U für die Population an.
- Im Modell geht man davon aus, dass es zu Beginn 20 Weibchen, 2000 Eier und 500 Jungtiere sind. Bestimmen Sie die Verteilung nach 1 bzw. 2 Jahren.
- Wie entwickelt sich die Population langfristig?
- Tierschützer wollen Maßnahmen ergreifen, damit mehr Jungtiere überleben. Wie hoch müsste die Überlebensrate der Jungtiere werden, damit die Population überlebt?

Aufgabe 241

Aus den beiden Rohstoffen R_1 und R_2 sollen die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 erstellt werden. Aus diesen Zwischenprodukten die Halbfertigprodukte H_1 und H_2 und aus diesen die Endprodukte E_1 und E_2 . Der Materialverbrauch soll durch folgende Tabellen angegeben werden:

	Z_1	Z_2
R_1	2	0
R_2	1	3

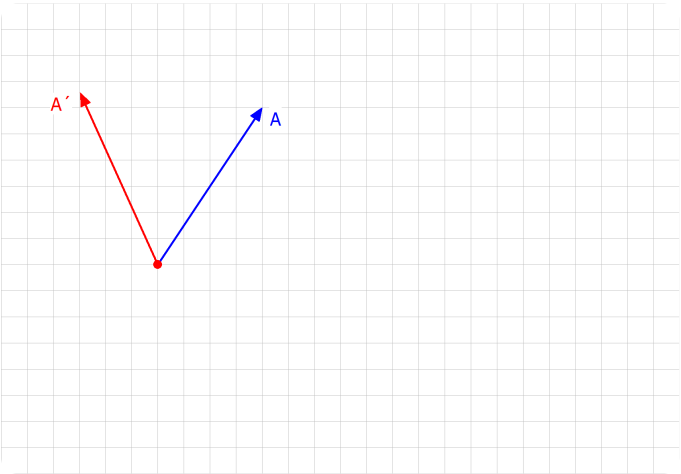
	H_1	H_2
Z_1	0	4
Z_2	2	3
	E_1	E_2
H_1	1	2
H_2	1	1

Welche Rohstoffmengen benötigt man, um 20 ME von E_1 und 30 ME von E_2 zu produzieren?

Drehungen

Aufgabe 242

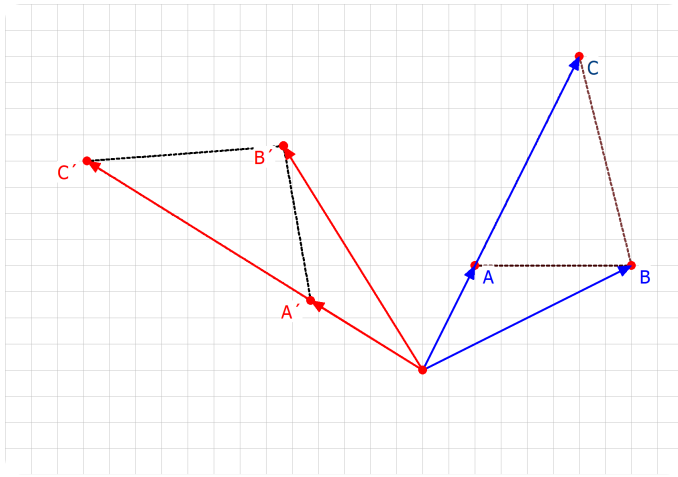
- a. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung D einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ um 58° .
- b. Drehen Sie den Punkt A (2|3) mit D auf A' um den Ursprung.



Aufgabe 243

Gegeben seien die Punkte A (1|2), B (4|2) und C (3|6), die das Dreieck ABC bilden.

Drehen Sie ABC um den Ursprung mit einem Winkel von 100° und bestimmen Sie somit das Bilddreieck A'B'C'.



1 ST Determinanten

Aufgabe 244

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 245

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 246

Bestimmen Sie mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 247

Die Matrix $A(\varphi)$ sei gegeben durch $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie: $\det(A^2) = \det(AA) = 1$

Aufgabe 248

Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist:

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -6$$

Aufgabe 249

Beantworten Sie mit Begründung die folgenden Fragen.

- Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m < n$ genau eine Lösung haben?
- Kann ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten mit $m > n$ unendlich viele Lösungen haben?

Aufgabe 250

Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem

- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung?

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für alle drei Fälle.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + (a^2 - 5)x_3 = a$$

Aufgabe 251

Gegeben sei das LGS

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

mit $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Wann ist es nicht lösbar?

[Hauptseite](#)

Aufgabe 252

Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Es soll ein Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 6 \end{pmatrix}$ so bestimmt werden, dass er senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

- Geben Sie dazu das entsprechende Gleichungssystem an, dass dieses Problem beschreibt.
- Lösen Sie dieses LGS mit einem beliebigen Verfahren.

1 ST Eigenwertprobleme

Aufgabe 253

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Bestimmen Sie Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\vec{v}$ von A.
- Zeigen Sie, dass für die Ergebnisse aus a) gilt: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Aufgabe 254

Gegeben sei die Matrix $S(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass ihre Eigenwerte $\lambda_1=1$ und $\lambda_2=-1$ sind.

5 ST Komplexe Zahlen

[Hauptseite](#)

1 ST Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 255

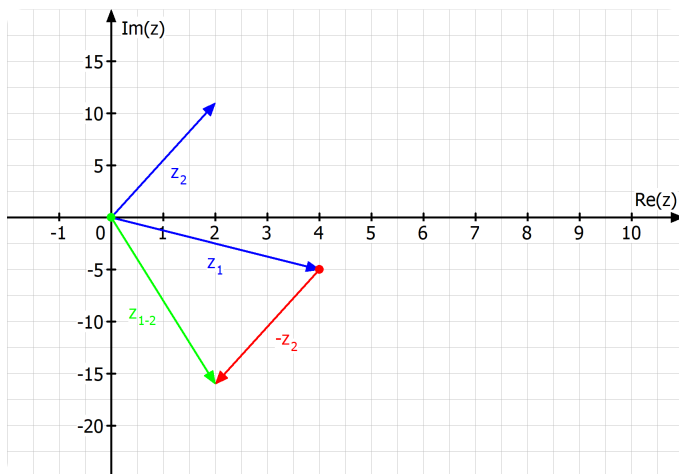
Berechnen Sie

$$4 - \sqrt{-4}.$$

Aufgabe 256

Gegeben seien die Zahlen $z_1 = 4 - 5i$ und $z_2 = 2 + 11i$.

- Bestimmen Sie die Differenz und das Produkt der beiden Zahlen.
- Veranschaulichen Sie die Subtraktion in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 257

Gegeben seien die Zahlen $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 30^\circ}$ und $z_2 = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$.

Bestimmen sie die Differenz und die Addition der beiden Zahlen.

Aufgabe 258

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichung:

$$z^4 = i$$

Aufgabe 259

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a. $2e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot 3e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

b. $(2e^{i \cdot \frac{\pi}{2}})^{100}$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 260

Ermitteln Sie die Nullstellen von $p(z) = z^3 - 3z^2 + 9z + 13$

Aufgabe 261

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $z = -i \cdot \bar{z}$

Aufgabe 262

Bestimmen Sie Realteil $\text{Re}(z)$ und Imaginärteil $\text{Im}(z)$ von $z = \frac{1+i}{3+i}$

1 ST Anwendungen

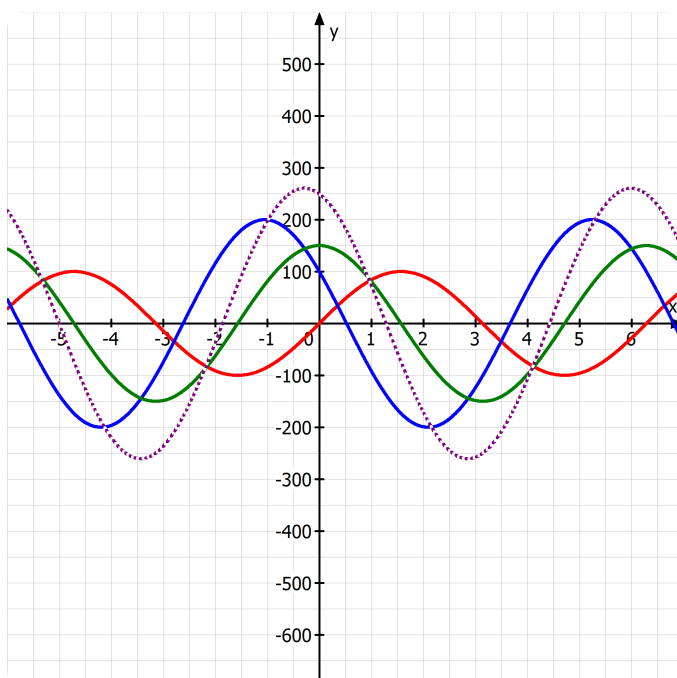
Aufgabe 263

Die drei Schwingungen u_1 , u_2 , u_3 werden zur Überlagerung gebracht. Wie lautet die Gleichung der resultierenden Schwingung $u(t)$ in komplexer und reeller Form?

$$u_1(t) = 100 \cdot \sin(t)$$

$$u_2(t) = 200 \cdot \sin\left(t + \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$u_3(t) = 150 \cdot \cos(t)$$



Aufgabe 264

[Hauptseite](#)

Gegeben seien die harmonischen Schwingungen $y_1(t) = A_1 \cdot \cos(t + \frac{\pi}{3})$ und $y_2(t) = A_2 \cdot \sin(t + \frac{\pi}{6})$.

Wie müssen A_1 und A_2 gewählt werden, damit gilt:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \cos(t)$$

Aufgabe 265

Bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

6 ST Funktionen von mehreren Veränderlichen

[🏠 Hauptseite](#)

1 ST Partielles Ableiten

Aufgabe 266

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x + e^{\frac{y}{x}}$

- Bestimmen Sie f_x und f_y .
- Bestimmen Sie f_{xx} , f_{yy} , f_{xy} , f_{yx} und f_{yyx} .

Aufgabe 267

Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) = x^2 y^2 + y \cdot \sin(z)$

Bestimmen Sie f_x , f_y , f_z , f_{xy} , f_{xz} und f_{yz} sowie f_{xyz}

1 ST Lokale Maxima und Minima

Aufgabe 268

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2y^3 - 6y - 12$

7 ST Differentialgleichungen

[Hauptseite](#)

1 ST Grundbegriffe

Aufgabe 269

Zeigen Sie, dass $y = \cos(kx) + \sin(kx)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' = -k^2 y$ ist.

Aufgabe 270

Welche Funktion reproduziert sich in der zweiten Ableitung bis auf ihr Vorzeichen?

Es gilt also: $y''(x) = -y(x)$.

Gesucht sei $y(x)$.

Aufgabe 271

Welche Funktion reproduziert sich in der ersten Ableitung?

Es gilt also: $y'(x) = y(x)$.

Gesucht sei $y(x)$.

2 ST Gewöhnliche Differentialgleichungen

ST Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 272

Lösen Sie mit einer geeigneten Methode die DGL $x \cdot y' - y^2 - 1 = 0$

(Es sei $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$).

Aufgabe 273

Lösen Sie das Anfangswertproblem mit einer geeigneten Methode: $y' \cdot x - y \cdot (x+1) = 0, y(1) = 2$.

ST Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 274

Lösen Sie mit einer geeigneten Methode:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 275

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$:

$$y^{(5)} + 8y'''' + 16y' = 0$$

ST Inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 276

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$:

$$y'' + 3y' + 2y = x + e^{2x}$$

Aufgabe 277

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$:

$$y'' + 4y' + 13y = e^{-2x} \cdot \sin 3x$$

ST Inhomogene lineare Differentialgleichungen und Variation der Konstanten

Aufgabe 278

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$:

$$x^2 \cdot y' + y = x^3 \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

ST Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 279

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\vec{y}$ des inhomogenen DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r}(x)$ mit

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} + e^x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 280

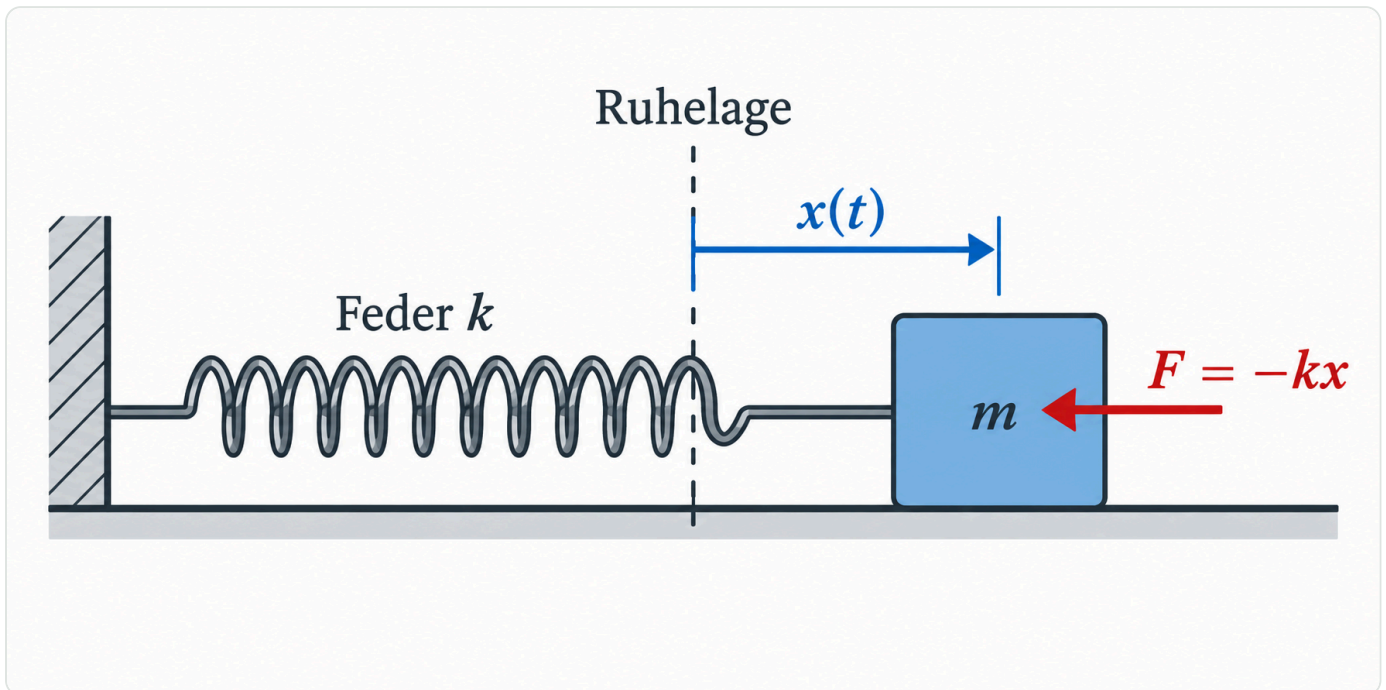
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\vec{y}$ des homogenen DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$$

Aufgabe 281

[Hauptseite](#)

Ein Körper der Masse $m = 0,5 \text{ kg}$ ist an einer Feder mit der Federkonstanten $k = 8 \text{ N/m}$ befestigt. Reibung wird zunächst vernachlässigt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $x(0) = 0,10 \text{ m}$ und $x'(0) = 0$.



Feder-Masse-System: Bei positiver Auslenkung $x(t)$ wirkt die Rückstellkraft $F = -kx$ zur Ruhelage.

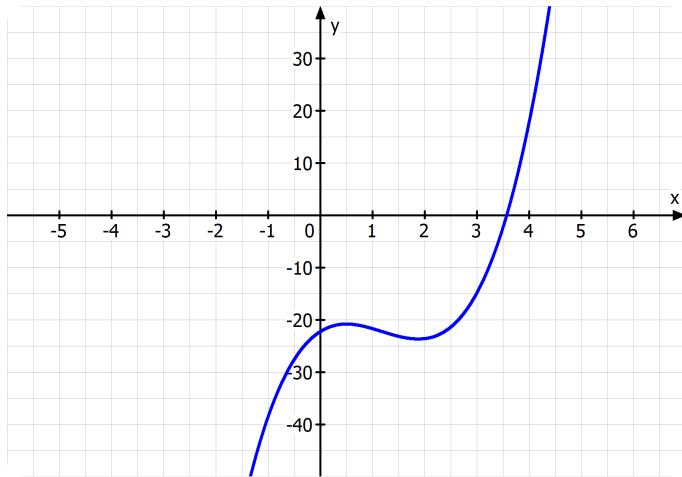
- Stellen Sie aus $m\ddot{x} = -kx$ die Schwingungsdifferentialgleichung auf.
- Lösen Sie das Anfangswertproblem und bestimmen Sie Kreisfrequenz und Periodendauer.
- Formulieren Sie die Differentialgleichung als System erster Ordnung und vergleichen Sie auf $0 \leq t \leq 5$ die analytische Lösung mit einer numerischen RK4-Lösung zur Schrittweite $h = 0,02$.
- Ergänzen Sie anschließend eine Dämpfung $c = 0,8 \text{ Ns/m}$ und beschreiben Sie die Veränderung.

 [Aufgabe in Google Colab bearbeiten](#)

1 LF Newton-Verfahren

Aufgabe 282

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $f(x) = 2,2x^3 - 7,854x^2 + 6,23x - 22,2411 = 0$



2 ST Polygonzugverfahren von Euler

Aufgabe 283

Berechnen Sie an der Stelle $x=1$ eine Näherung für $y(x)$ mit dem Euler-Verfahren für folgendes Anfangswertproblem (AWP):

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \text{ mit } y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ und der Schrittweite } h = \frac{1}{4}$$

9 ST Optimierung

[Hauptseite](#)

1 ST Lineare Optimierung

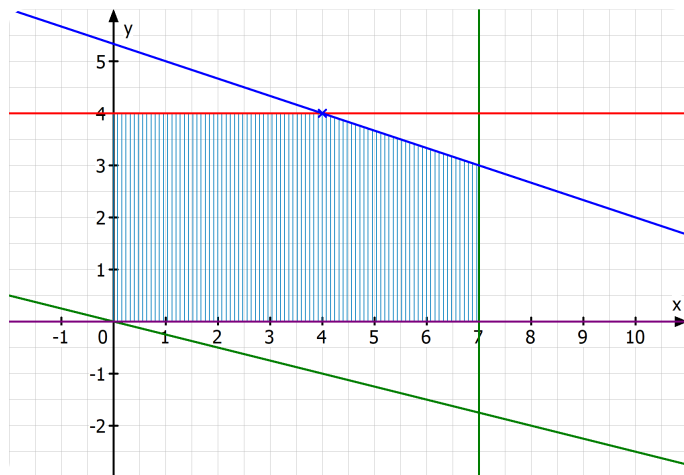
Aufgabe 284

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem $f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} = \max!$, $A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$.

$$\text{Es sei } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{16}{3} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a. Lösen Sie das Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

b. Erläutern Sie die graphische Lösung:



Aufgabe 285

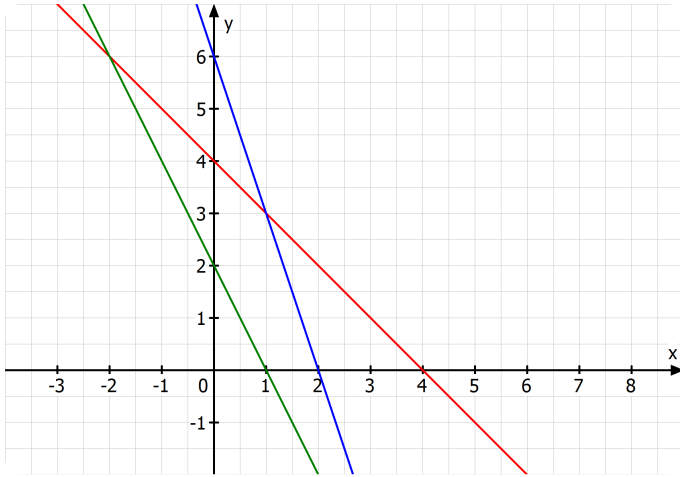
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem $f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x} = \max!$, $A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$.

$$\text{Es sei } \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a. Lösen Sie das Problem mit dem Simplex-Algorithmus.

b. Lösen Sie das Problem graphisch.

c. Eingezeichnet ist die Isolinie (grün) für $f(x_1, x_2) = 2$. Erläutern Sie deren Bedeutung



1 ST Nichtlineare Optimierung

Aufgabe 286

Bestimmen Sie mit der Lagrange-Methode die Koordinaten des Punktes D der x-y-Ebene, der auf der Parabel $2y - x^2 = 0$ liegt und vom Punkt P (4|1) minimalen Abstand hat.

