

Dieses Lösungsbuch gehört zur KDP-Arbeitsfassung der Aufgabensammlung vom 5. September 2026. Es enthält die Lösungen zu Kapitel 0 mit Rechenwegen und bearbeitbaren Word-Formeln. Die Kapitelnummern entsprechen der Aufgabensammlung. Innerhalb jedes Abschnitts werden die Aufgaben in ihrer Reihenfolge aufgeführt; ein kurzer Aufgabentitel erleichtert die Zuordnung.

[W] bezeichnet Wiederholung, [ST] Inhalte zur Studienvorbereitung. Bei mehrdeutigen Angaben werden die zugrunde gelegte Lesart und gegebenenfalls weitere Lösungen genannt. Näherungswerte sind gerundet.

0 Grundlagen

0.1 W Aussagenlogik

Aufgabe 1 · Aussagen erkennen

Eine Aussage ist ein Satz, dem eindeutig der Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet werden kann. Auch eine falsche Behauptung ist eine Aussage.

Teil	Einordnung	Begründung
a	Aussage, falsch	$1 + 1 = 2$, also gilt die behauptete Gleichheit nicht.
b	Aussage, wahr	$1 + 2 = 3$.
c	Aussage, falsch	Der Satz enthält das falsch geschriebene Wort „Rächtschraibveler“.
d	Keine Aussage	Eine Frage behauptet keinen Sachverhalt.
e	Aussage, wahr	Es gibt unendlich viele Primzahlen.
f	Keine Aussage	Es handelt sich um eine Aufforderung.
g	Keine mathematische Aussage	Ohne weiteren Kontext ist kein sinnvoll bestimmter Wahrheitswert zuweisbar.

0.2 W Mengen

Aufgabe 2 · Mengendiagramme

Bild A: Die Menge B liegt vollständig in A. Dargestellt ist eine Teilmengenbeziehung; sie ist keine Verknüpfungsoperation.

$$B \subsetneq A.$$

Bild B: Schwarz markiert sind die Elemente, die zu beiden Mengen gehören.

$$A \cap B.$$

Bild C: Schwarz markiert sind die Elemente von B, die nicht zu A gehören.

$$B \setminus A.$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 3 · Inklusionskette der Zahlenbereiche

Jede natürliche Zahl ist ganz, jede ganze Zahl rational, jede rationale Zahl reell und jede reelle Zahl komplex. Alle Inklusionen sind echt:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Beispiele für jeweils neu hinzukommende Zahlen sind -1 , $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ und i .

Aufgabe 4 · Mengen aufzählen

a) Beide Bedingungen müssen gleichzeitig erfüllt sein:

$$x^2 = 9 \iff x \in \{-3, 3\}, \quad x - 3 = 6 \iff x = 9.$$

Es gibt kein gemeinsames Element. **Ergebnis:** $M = \emptyset$.

b) In einer Menge wird jedes Element nur einmal aufgeführt. Werden Groß- und Kleinbuchstaben als verschiedene Zeichen betrachtet, ergibt sich:

$$M = \{S, t, u, g, a, r\}.$$

Werden Buchstaben ohne Unterscheidung der Großschreibung gemeint, schreibt man stattdessen $M = \{s, t, u, g, a, r\}$.

Aufgabe 5 · Vereinigung und Differenzen

Die Vorlage legt nicht ausdrücklich fest, ob 0 zu den natürlichen Zahlen gehört. Für $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ist $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und damit:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ A \setminus B &= \{5, 6, 7, 8, 9\}, \quad B \setminus A = \emptyset, \\ C \cap B &= \{2, 4\}. \end{aligned}$$

Bei der Konvention $0 \in \mathbb{N}$ enthält die Vereinigung zusätzlich 0, es gilt $B \setminus A = \{0\}$ und $C \cap B = \{0, 2, 4\}$. Die Menge $A \setminus B$ bleibt gleich.

0.3 Bruchrechnen

Aufgabe 6 · Ohne Taschenrechner

a) Zähler und Nenner zunächst getrennt zusammenfassen:

$$\frac{-37 - 9}{6 - \frac{1}{4}} = \frac{-46}{\frac{23}{4}} = -46 \cdot \frac{4}{23} = -8.$$

b) Die Dezimalzahl als Bruch schreiben:

$$\frac{1}{3,5} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}.$$

c) Beim Dividieren gleicher positiver Basen werden die Exponenten subtrahiert:

$$\frac{1,04^{5/2}}{1,04^{5/2-1}} - 1 = 1,04^1 - 1 = 0,04.$$

[Hauptseite](#)

d) Es gilt $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\begin{aligned} & \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x+3+x^2-x-6}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-3}{x^2-4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 · Mit Taschenrechner

a)

$$1000 \cdot \frac{1,1^4}{1,2^2 - 1,01} = 1000 \cdot \frac{1,4641}{0,43} \approx 3404,88372.$$

b) Besonders auf die Klammer im Nenner achten:

$$\frac{1,1^5 - 1}{1,1^2 - \frac{1}{1-0,2}} = \frac{0,61051}{1,21 - 1,25} = -15,26275.$$

0.4 ^W Potenzen

Aufgabe 8 · Dritte Wurzel

Gesucht ist die reelle Zahl, deren dritte Potenz gleich -8 ist.

$$(-2)^3 = -8 \implies \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Aufgabe 9 · Negative Exponenten

Wegen der negativen Exponenten muss $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gelten. Mit den Potenzgesetzen folgt:

$$(x^{-2}y^{-3})^{-3} \cdot x = x^6y^9 \cdot x = x^7y^9.$$

Die Einschränkungen des Ausgangsterms gelten auch nach der Vereinfachung.

Aufgabe 10 · Produkt von Bruchpotenzen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{2^5 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 2^4} = \frac{1}{2^2 \cdot 3^3} = \frac{1}{108}.$$

Aufgabe 11 · Wurzeln mit Parametern

Für beliebige reelle Exponenten verwenden wir die Voraussetzung $a > 0$; sie fehlt in der Aufgabe. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^{5x+7}} \sqrt[4]{a^{3x+10}} &= a^{\frac{5x+7}{3} + \frac{3x+10}{4}} \\ &= a^{\frac{20x+28+9x+30}{12}} = a^{\frac{29x+58}{12}}. \end{aligned}$$

Für andere Basen wären Definitionsbereich und mögliche Sonderfälle gesondert zu untersuchen.

0.5 W Logarithmen

[Hauptseite](#)

Aufgabe 12 · Logarithmengesetze anwenden

Für a), b) und f) gibt es keinen einfachen ganzzahligen Wert. Die logarithmischen Ausdrücke sind exakt; Dezimalwerte dienen nur der Näherung.

a) $\ln(0,8) = \ln 4 - \ln 5 \approx -0,223144$.

b) $\ln(1,2) = \ln 6 - \ln 5 \approx 0,182322$.

c) $\ln e = 1$.

d) $\ln(e^3 e^2) = \ln(e^5) = 5$.

e) $\log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3$.

f) $\log_{10}(2000) = 3 + \log_{10} 2 \approx 3,301030$.

g) $e \cdot \ln(e^e) = e \cdot e = e^2$.

0.6 W Beträge

Aufgabe 13 · Betragsgleichungen

a) Ein Betrag hat den Wert 4 genau dann, wenn sein Argument 4 oder -4 beträgt:

$$5x - 9 = 4 \quad \text{oder} \quad 5x - 9 = -4.$$

$$L = \left\{ 1, \frac{13}{5} \right\}.$$

b)

$$4x - 7 = 7 \quad \text{oder} \quad 4x - 7 = -7 \quad \Rightarrow \quad L = \left\{ 0, \frac{7}{2} \right\}.$$

c) Es gilt $2|x - 6| = |2x - 12|$. Zwei Beträge sind gleich, wenn ihre Argumente gleich oder entgegengesetzt sind:

$$3x + 7 = 2x - 12 \quad \text{oder} \quad 3x + 7 = -(2x - 12).$$

Daraus folgen $x = -19$ beziehungsweise $x = 1$. Einsetzen liefert auf beiden Seiten 50 beziehungsweise 10.

$$L = \{-19, 1\}.$$

0.7 ST Summen und Produkte

Aufgabe 14 · Summen- und Produktzeichen

a) $\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

b) $\sum_{k=-3}^3 k^2 = 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 28$.

$$\text{c) } \prod_{k=1}^5 k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

[Hauptseite](#)

d) Beim Multiplizieren von Zweierpotenzen addieren sich die Exponenten:

$$\prod_{k=-3}^3 2^k = 2^{-3-2-1+0+1+2+3} = 2^0 = 1.$$

Aufgabe 15 · Verschachtelte Summe

Das innere Produkt enthält genau die beiden Faktoren j und $j+1$:

$$\prod_{i=j}^{j+1} i = j(j+1).$$

$$S = \sum_{j=1}^5 j(j+1) = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 = 70.$$

0.8 ST Folgen und Grenzwerte

Aufgabe 16 · Geometrische Reihe

Der Anfangswert ist $a_1 = 3$, der Quotient $q = \frac{1}{3}$. Für die endliche Summe gilt:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

a)

$$S_9 = 3 \frac{1 - (\frac{1}{3})^9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \left(1 - \frac{1}{19683} \right) = \frac{9841}{2187} \approx 4,499771.$$

b) Wegen $|q| < 1$ konvergiert die unendliche geometrische Reihe:

$$S_\infty = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Aufgabe 17 · Grenzwert zur Eulerschen Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Zur Begründung logarithmieren wir. Für $t > 0$ gilt $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$. Mit $t = 1/n$ folgt:

$$\frac{n}{n+1} \leq n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

Beide äußeren Folgen gehen gegen 1. Durch Exponentieren ergibt sich der Grenzwert e .

Aufgabe 18 · Fibonacci-Folge

Jedes Glied ist die Summe der beiden Vorgänger. Beginnend mit dem ausdrücklich gegebenen Index 0 sind die ersten zehn Glieder:

$$(a_0, a_1, \dots, a_9) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34).$$

Falls mit „ersten zehn“ stattdessen die Indizes 1 bis 10 gemeint sind, lautet die Liste $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55)$.

Aufgabe 19 · Abklingender Restterm

[Hauptseite](#)

$$a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} = 3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Der zweite Term geht gegen 0. Deshalb gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Aufgabe 20 · Quotient zweier linearer Terme

Zähler und Nenner durch n dividieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

0.9 Kombinatorik

Aufgabe 21 · Ein Element auswählen

Für ganzzahliges $n \geq 1$ gilt:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

Anschaulich gibt es n Möglichkeiten, ein einzelnes Element aus n Elementen auszuwählen.

Aufgabe 22 · Pascalsches Dreieck

a) In der Zeile mit Index 5 stehen die Koeffizienten **1, 5, 10, 10, 5, 1**. Daher ist $\binom{5}{2} = 10$.

b) Die Zeile mit Index 4 lautet **1, 4, 6, 4, 1**. Nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Aufgabe 23 · Wörter aus vier Buchstaben

a) Ohne Wiederholung gibt es nacheinander 4, 3, 2 und 1 Möglichkeiten:

$$4! = 24.$$

b) Mit Wiederholung stehen an jeder Position vier Buchstaben zur Verfügung:

$$4^4 = 256.$$

Aufgabe 24 · Vierstellige Zahlen

Eine vierstellige Zahl darf nicht mit 0 beginnen.

a) Ohne Wiederholung: Für die erste Stelle gibt es 9 Möglichkeiten, danach 9 einschließlich der 0, dann 8 und schließlich 7.

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

b) Mit Wiederholung:

$$9 \cdot 10^3 = 9000.$$

Aufgabe 25 · Skattisch

[Hauptseite](#)

Die Reihenfolge innerhalb der ausgewählten Dreiergruppe spielt keine Rolle:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Gefragt sind mögliche einzelne Tische. Eine Aufteilung aller sechs Personen auf zwei unbeschriftete Tische ergäbe dagegen $20/2 = 10$.

Aufgabe 26 · Symmetrie der Binomialkoeffizienten

Für $0 \leq k \leq n$, ganzzahlig, gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Eine k -elementige Teilmenge ist außerdem eindeutig durch ihr $(n-k)$ -elementiges Komplement bestimmt.

Aufgabe 27 · Sieben Bits

Jedes der sieben Bits besitzt zwei mögliche Werte. Nach der Produktregel:

$$2^7 = 128 \text{ Zeichen.}$$

Aufgabe 28 · Freie Randplätze

Alle Zuordnungen von sechs unterscheidbaren Personen zu acht Stühlen seien gleich wahrscheinlich. Es gibt $8!/2!$ mögliche Zuordnungen. Sind beide Randplätze frei, können sich die Personen auf den sechs mittleren Stühlen in $6!$ Reihenfolgen setzen:

$$P = \frac{6!}{8!/2!} = \frac{2}{8 \cdot 7} = \frac{1}{28} \approx 3,5714\%.$$

Aufgabe 29 · Summe der Binomialkoeffizienten

Im binomischen Lehrsatz setzen wir beide Variablen gleich 1:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Damit ist $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ bewiesen.

0.10 Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 30 · Quadratische Terme vergleichen

$$x^2 - 2x + 3 < (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2.$$

Nach Kürzen von x^2 und Umstellen bleibt $5 < 3x$.

$$L = \left(\frac{5}{3}, \infty\right).$$

Aufgabe 31 · Exponentielle Ungleichung

Logarithmieren ist wegen der positiven Seiten zulässig:

$$n \ln(0,9) < \ln(0,5).$$

[Hauptseite](#)

Beim Dividieren durch die negative Zahl $\ln(0,9)$ dreht sich das Ungleichheitszeichen um:

$$n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,578813.$$

Für natürliche n ist die Lösung $n \geq 7$; für reelle n gilt die strikte Grenze oben.

Aufgabe 32 · Bruchgleichung

Zunächst gilt $x \neq -2$ und $x \neq 1$. Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner liefert:

$$(x-1)^2 + x(x+2) = 2x^2 + 1.$$

Die linke Seite ist ebenfalls $2x^2 + 1$. Die Gleichung gilt daher für jede Zahl der Definitionsmenge:

$$L = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

Aufgabe 33 · Substitution in einer Exponentialgleichung

Setze $t = e^{x-1} > 0$. Dann ist $e^{1-x} = 1/t$:

$$t + 1 = \frac{2}{t} \iff t^2 + t - 2 = 0 \iff (t-1)(t+2) = 0.$$

Nur $t = 1$ ist positiv. Somit $e^{x-1} = 1$ und $x = 1$.

Aufgabe 34 · Gleiche Basis herstellen

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^{5/2} = 2^x.$$

Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist injektiv. **Ergebnis:** $x = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 35 · Exponentialfunktion und Kosinus

Für reelles t gilt $e^t = 1$ genau dann, wenn $t = 0$. Deshalb:

$$e^{\cos x} = 1 \iff \cos x = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 36 · Logarithmische Gleichung

Die Argumente aller Logarithmen müssen positiv sein. Aus $x^2 - 1 > 0$ und $x > 0$ folgt $x > 1$. Nun gilt:

$$\ln(x^2 - 1) = \ln x + 1 = \ln(ex).$$

$$x^2 - 1 = ex \iff x^2 - ex - 1 = 0.$$

$$x = \frac{e \pm \sqrt{e^2 + 4}}{2}.$$

Nur die positive Wurzel liegt im Definitionsbereich:

$$L = \left\{ \frac{e + \sqrt{e^2 + 4}}{2} \right\}.$$

Aufgabe 37 · Identität mit Logarithmen

[Hauptseite](#)

Für $x \geq 1$ gilt $x > \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$, also sind beide Logarithmusargumente positiv. Mit dem Produktgesetz:

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\&= \ln[(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})] \\&= \ln(x^2 - (x^2 - 1)) = \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

0.11 Funktionen

Aufgabe 38 · Begriff, Definitions- und Wertemenge

Ein Graph stellt eine Funktion von x nach y dar, wenn jede senkrechte Gerade ihn höchstens einmal schneidet.

Bild A: Keine Funktion von x nach y . Für jedes dargestellte positive x treten zwei y -Werte auf, zum Beispiel bei $x = 1$ die Werte $y = 1$ und $y = -1$.

Bild B: Eine Funktion. Bei der üblichen Fortsetzung der dargestellten Parabel gilt:

$$D = \mathbb{R}, \quad W = [0, \infty).$$

Bild C: Eine Funktion. Die dargestellte Wurzelkurve beginnt im Ursprung und setzt sich nach rechts fort:

$$D = [0, \infty), \quad W = [0, \infty).$$

Diese Mengen beziehen sich auf die vollständigen dargestellten Kurventypen. Ein endlicher Bildausschnitt allein legt die Fortsetzung außerhalb des Ausschnitts nicht formal fest.

Aufgabe 39 · Kosinusgleichung

Gesucht sind die positiven Lösungen von $\cos(2\pi(x - 1)) = \sqrt{3}/2$. Die Winkel mit diesem Kosinuswert sind:

$$\begin{aligned}2\pi(x - 1) &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\x &= 1 + k \pm \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Nach Umindizierung und Beschränkung auf positive Werte erhält man:

$$x = \frac{1}{12} + k \quad \text{oder} \quad x = \frac{11}{12} + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Aufgabe 40 · Frequenz einer Sinusschwingung

Aufeinanderfolgende Maxima liegen bei $x = 10, 50$ und 90 . Die Periodenlänge beträgt daher:

$$T = 50 - 10 = 40 \text{ Einheiten.}$$

Die Frequenz ist der Kehrwert der Periodenlänge:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ je Einheit.}$$

Die Abbildung nennt keine Zeiteinheit. Nur wenn die horizontale Achse Sekunden darstellt, lautet die Einheit Hz. Drittelt sich die Schwingungszahl **im selben Zeitintervall**, gilt:

$$f_{\text{neu}} = \frac{f}{3} = \frac{1}{120}, \quad T_{\text{neu}} = 120.$$

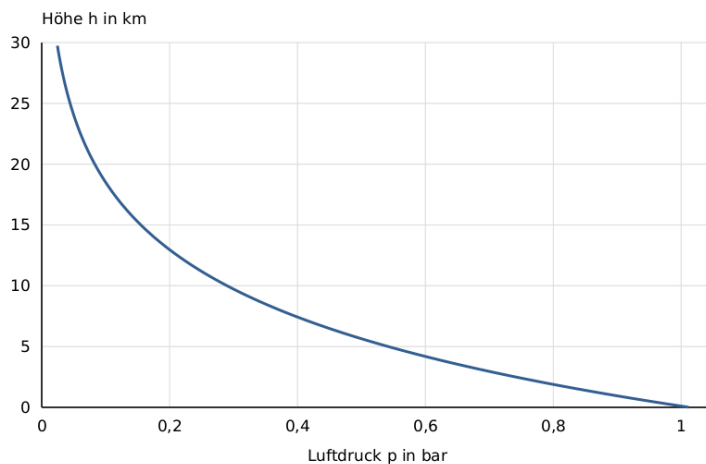
[Hauptseite](#)

Aufgabe 41 · Luftdruck und Höhe

a) Aus $p = p_0 e^{-h/a}$ folgt durch Division und Logarithmieren:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{h}{a} \implies h(p) = a \ln\left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Es gilt $0 < p \leq p_0 = 1,013 \text{ bar}$. Die Funktion nimmt streng ab, durchläuft $(p_0, 0)$ und wächst für $p \rightarrow 0^+$ unbegrenzt. Die Skizze zeigt p auf der horizontalen und h auf der vertikalen Achse.



Höhe als Funktion des Luftdrucks; Modell mit konstanter Lufttemperatur.

b) Beim halben Luftdruck ist:

$$h\left(\frac{p_0}{2}\right) = 7991 \ln 2 \text{ m} \approx 5538,94 \text{ m} \approx 5,54 \text{ km}.$$

c) Die Höhe in Metern einsetzen:

$$p(10000) = 1,013 e^{-10000/7991} \text{ bar} \approx 0,289821 \text{ bar}.$$

Alle Ergebnisse gelten innerhalb des in der Aufgabe vorgegebenen Modells.

Aufgabe 42 · Polynome erkennen

Ein Polynom ist eine endliche Summe von Potenzen mit nichtnegativen ganzzahligen Exponenten und konstanten Koeffizienten.

Teil	Ergebnis	Begründung
a	Ja, Grad 4	Höchste Potenz ist $3x^4$.
b	Ja, Grad 4	$x^4 + x^2$ erfüllt die Definition.
c	Nein	$\sqrt{x} = x^{1/2}$ hat keinen ganzzahligen Exponenten.
d	Als gegebene Funktion: nein	Der Quotient ist bei $x = 2$ nicht definiert. Für $x \neq 2$ gilt $f(x) = x + 2$; erst die stetige Ergänzung ergibt ein Polynom auf ganz $\mathbb{R}$.
e	Ja, Grad 15	Das Produkt $(x + 8)^8 x^7$ hat den höchsten Term x^{15} .

Teil	Ergebnis	f
f	Ja, Grad 0	Hauptseite 11 ist ein von null verschiedenes konstantes Polynom.

Aufgabe 43 · Polynomdivision

a) Schreibe $P = 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 21$ und $Q = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 7$. Die Quotiententerme werden durch Division der jeweils führenden Terme gewonnen:

$$\begin{aligned} P - x^2Q &= -2x^4 + x^3 - 7x^2 + 21, \\ (P - x^2Q) - (-x)Q &= 6x^3 - 10x^2 + 7x + 21, \\ (P - x^2Q + xQ) - 3Q &= -25x^2 + 16x. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, für $Q(x) \neq 0$:

$$f(x) = x^2 - x + 3 + \frac{-25x^2 + 16x}{2x^3 + 5x^2 - 3x + 7}.$$

b) Jetzt sind $P = 8x^5 + 34x^4 - 55x^3 + 4x$ und $Q = 4x^4 - 5x^3 + 2$. Es folgt:

$$\begin{aligned} P - 2xQ &= 44x^4 - 55x^3, \\ (P - 2xQ) - 11Q &= -22. \end{aligned}$$

Also, wiederum nur für $Q(x) \neq 0$:

$$f(x) = 2x + 11 - \frac{22}{4x^4 - 5x^3 + 2}.$$

Zur Probe gilt jeweils: Zähler = Quotient · Nenner + Rest.

Aufgabe 44 · Verkettung

Zuerst wird g ausgewertet, anschließend f:

$$\begin{aligned} g(5) &= (5 + 9)^2 = 196, \\ (f \circ g)(5) &= f(196) = \sqrt{196} - 8 = 14 - 8 = 6. \end{aligned}$$

Allgemein ist $\sqrt{(x+9)^2} = |x+9|$; der Betrag darf nicht ohne Einschränkung weggelassen werden.

Aufgabe 45 · Verschiebung in y-Richtung

a) Zwei Einheiten nach oben bedeuten Addition von 2:

$$g(x) = f(x) + 2 = x^2 - 2x - 2 + 2 = x^2 - 2x.$$

b) Zwei Einheiten nach unten bedeuten Subtraktion von 2:

$$g(x) = f(x) - 2 = x^2 - 2x - 4.$$

Aufgabe 46 · Stauchung und Streckung

Die Aufgabe nennt die Richtung nicht. Unter der üblichen Lesart „in y-Richtung“ gilt:

a) „Mit dem Faktor 3 gestaucht“ wird als Verringerung der Funktionswerte auf ein Drittel verstanden:

$$g(x) = \frac{1}{3}f(x) = \frac{4}{3}\sin x.$$

[Hauptseite](#)

b) Eine Streckung um den Faktor 4 vervierfacht die Funktionswerte:

$$g(x) = 4f(x) = 4(x - 4)^2.$$

Falls stattdessen eine Veränderung in **x-Richtung** beabsichtigt ist, erhält man für a) $g(x) = f(3x) = 4\sin(3x)$ und für b) $g(x) = f(x/4) = (x/4 - 4)^2$. Die Aufgabenformulierung sollte die Richtung und bei a) den Multiplikationsfaktor ausdrücklich nennen.

Aufgabe 47 · Zwei Spiegelungen

An der x-Achse werden die Funktionswerte negiert:

$$h(x) = -f(x) = -e^{-x}.$$

Bei anschließender Spiegelung an der y-Achse wird x durch $-x$ ersetzt:

$$g(x) = h(-x) = -e^{-(-x)} = -e^x.$$

Aufgabe 48 · Umkehrfunktion

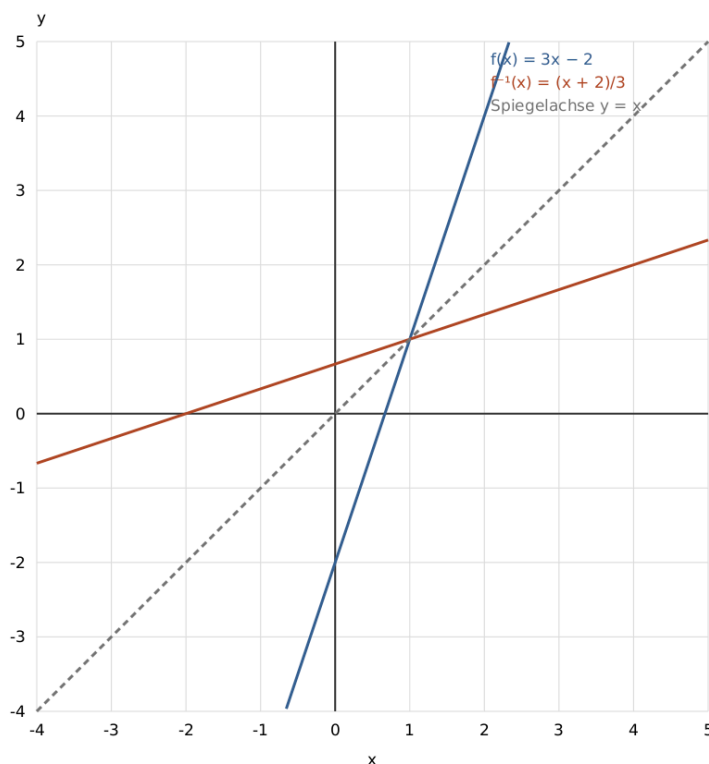
Aus $y = 3x - 2$ wird durch Auflösen nach x:

$$x = \frac{y + 2}{3}.$$

Nach Vertauschen der Variablennamen ergibt sich:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}, \quad D_{f^{-1}} = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

Zur Probe gilt $f(f^{-1}(x)) = 3(x + 2)/3 - 2 = x$. Grafisch entsteht die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Geraden $y = x$. Beispielsweise wird $(0, -2)$ zu $(-2, 0)$ und $(1, 1)$ bleibt fest.



Funktion, Umkehrfunktion und Spiegelachse.

Aufgabe 49 · Dreieck, Winkel und Abstand

In der Abbildung ist α der **gesamte Innenwinkel bei A** zwischen AB und AC. D liegt zwischen B und C, und AD ist die Höhe auf BC.

Aus der Flächenformel folgt zunächst:

$$h = AD = \frac{2A_{ABC}}{BC} = \frac{108}{11,6} \text{ cm} \approx 9,310345 \text{ cm}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABD ist AB die Hypotenuse:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{12^2 - h^2} \approx 7,570831 \text{ cm}.$$

$$CD = BC - BD \approx 4,029169 \text{ cm}.$$

Die Höhe teilt α in zwei Teilwinkel:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{BD}{AD}\right) + \arctan\left(\frac{CD}{AD}\right) \approx 62,52^\circ.$$

Für den Abstand d des Punktes D zur Strecke AB wird der Flächeninhalt von ABD auf zwei Arten berechnet:

$$\frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{1}{2} AB \cdot d.$$

$$d = \frac{AD \cdot BD}{AB} \approx 5,87 \text{ cm}.$$

Der Lotfuß liegt auf der Strecke AB, da die beiden Winkel an A und B im rechtwinkligen Dreieck ABD spitz sind. Daher ist dies auch der Abstand zur Strecke und nicht nur zur zugehörigen Geraden.

Aufgabe 50 · Strahlensatz

Die kleine Grundseite ist 5 m, die gesamte Grundseite $5 + 7,5 = 12,5$ m. Wegen der parallelen senkrechten Strecken sind die Dreiecke ähnlich:

$$\frac{x}{2 \text{ m}} = \frac{12,5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 2,5.$$

$$x = 5 \text{ m}.$$

Aufgabe 51 · Rechteck

Aus Umfang und Flächeninhalt folgt:

$$2(a + b) = 140 \implies a + b = 70,$$

$$ab = 1200.$$

Setze $b = 70 - a$:

$$a(70 - a) = 1200 \iff a^2 - 70a + 1200 = 0$$

$$\iff (a - 30)(a - 40) = 0.$$

Ergebnis: Die Seitenlängen sind **30 cm und 40 cm**. Die Bezeichnungen a und b sind vertauschbar.

Aufgabe 52 · Rechtwinkliges Dreieck

[△ Hauptseite](#)

Nach Pythagoras:

$$c = \sqrt{30^2 + 40^2} \text{ cm} = 50 \text{ cm}.$$

Mit der üblichen Zuordnung, dass α der Seite a gegenüberliegt:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{30}{40}\right) \approx 36,87^\circ,$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53,13^\circ.$$

0.13 ST Beweise

Aufgabe 53 · Summe der Kubikzahlen

Zu zeigen ist für alle ganzen $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $1^3 = (1 \cdot 2/2)^2 = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Die Formel gelte für ein festes $n \geq 1$.

Induktionsschritt: Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Dies ist die Formel für $n+1$. Damit gilt sie für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 54 · Vergleich von Quadrat und Zweierpotenz

Zu zeigen ist $n^2 < 2^n$ für alle ganzen $n \geq 5$.

Induktionsanfang: $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $n^2 < 2^n$ für ein festes $n \geq 5$.

Induktionsschritt: Wegen $n \geq 5$ ist $n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1 \geq 14 > 0$. Folglich gilt:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2n^2 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 55 · Summe der ersten natürlichen Zahlen

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $1 = 1 \cdot 2/2$.

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$.

Induktionsschritt:

[△ Hauptseite](#)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Damit gilt $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ für alle ganzen $n \geq 1$.

Aufgabe 56 · Exponentialfunktion wächst schneller als Potenzen

Die Behauptung bedeutet: Für jeden **festen** nichtnegativen ganzzahligen Exponenten n gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Für $x > 0$ sind alle Terme der Exponentialreihe nichtnegativ. Daher liefert bereits ein einzelner Term die Abschätzung:

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ \frac{e^x}{x^n} &\geq \frac{x}{(n+1)!} \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Für einen festen reellen Exponenten wählt man ebenso eine ganze Zahl m größer als diesen Exponenten und verwendet den Reihenterm $x^m/m!$.

Aufgabe 57 · Skalierung einer Potenzfunktion

Sei $f(x) = x^n$ mit ganzzahligem $n \geq 1$. Das Potenzgesetz für Produkte ergibt unmittelbar:

$$f(kx) = (kx)^n = k^n x^n = k^n f(x).$$

Die Gleichung gilt für alle reellen k und x . Für negative ganzzahlige Exponenten sind k und x von null verschieden zu wählen; für beliebige reelle Exponenten ist beispielsweise $k > 0$ und $x > 0$ eine hinreichende Voraussetzung.

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Analysis-Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

1.1 BF/LF Ableitungen

Aufgabe 58 · h-Methode

Für $f(x) = 2x^2$ und $x_0 = 1$ gilt

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 2h) = 4.$$

Aufgabe 59 · Faktorregel

$$f(x) = -3e^x \implies f'(x) = -3e^x.$$

Aufgabe 60 · Summenregel

$$\frac{d}{dx}(4x^7 + 3 \cos x - 5e^x + \ln x) = 28x^6 - 3 \sin x - 5e^x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Für $z = x^2 + y^2 - 1$ ist $\partial z / \partial y = 2y$.

Aufgabe 61 · Produktregel

$$y' = (12x^2 - 3)(2e^x - \sin x) + (4x^3 - 3x)(2e^x - \cos x).$$

Aufgabe 62 · Quotientenregel

$$y' = \frac{(6x - 1) \sin x - (3x^2 - x) \cos x}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0.$$

Aufgabe 63 · Kettenregel

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \implies y'(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Aufgabe 64 · Produktregel mit drei Faktoren

Für $f(x) = x \sin x \ln x$ mit $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \sin x \ln x + x \cos x \ln x + \sin x.$$

Aufgabe 65 · Gedämpfte Schwingung

Für $s(t) = e^{-t} \cos(5t + 6)$ ist

$$v(t) = s'(t) = -e^{-t} \cos(5t + 6) - 5e^{-t} \sin(5t + 6).$$

Wegen $|s(t)| \leq e^{-t}$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$. Das Pendel schwingt mit Kreisfrequenz 5 und exponentiell abklingender Amplitude um die Ruhelage.

Aufgabe 66 · Produktregel für drei Faktoren

$$(fgh)' = (fg)'h + (fg)h' = f'gh + fg'h + fgh',$$

Aufgabe 67 · Verkettung dreier Funktionen

[Hauptseite](#)

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

Aufgabe 68 · Ableitung von x hoch x

Für $f(x) = x^x$, $x > 0$, liefert logarithmisches Differenzieren

$$\ln f = x \ln x \implies f'(x) = x^x (\ln x + 1).$$

Aufgabe 69 · Differenzregel

Außerdem folgt aus Summen- und Faktorregel $(f - g)' = f' - g'$.

Aufgabe 70 · Gemischte partielle Ableitungen

Es wird zuerst nach x , danach nach t differenziert:

$$\begin{aligned}\partial_t \partial_x (x^2 t^2) &= 4xt, \\ \partial_t \partial_x (xe^t) &= e^t, \\ \partial_t \partial_x (te^{ax}) &= ae^{ax}, \\ \partial_t \partial_x (\sqrt{x} \cos(at)) &= -\frac{a \sin(at)}{2\sqrt{x}}, \\ \partial_t \partial_x (\ln(ax) \sqrt{bt}) &= \frac{b}{2x\sqrt{bt}}.\end{aligned}$$

Die Formeln gelten dort, wo die Ausgangsfunktionen und Ableitungen definiert sind.

Aufgabe 71 · Gaußfunktion

Für $\sigma > 0$ gilt

$$f'(x) = -\frac{x - \mu}{\sigma^2} f(x).$$

Da $f > 0$, steigt f bis $x = \mu$ und fällt danach. Das einzige Extremum ist das globale Maximum

$$H\left(\mu \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right).$$

Aufgabe 72 · Funktion mehrerer Veränderlicher

Für $f(x, y) = x^2 \ln(x^2 + y^2)$ und $x^2 + y^2 > 0$ gilt

$$f_x = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Aufgabe 73 · Verschachtelte Funktion

$$f(x) = 2e^{\frac{1}{2}\ln(1+\ln x)} = 2\sqrt{1+\ln x}, \quad x > e^{-1}.$$

Damit ist

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

1.2 BF Monotonieverhalten

[Hauptseite](#)

Aufgabe 74 · Monotonie

Für $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ gilt $f'(x) = 3x(x - 2)$. Daher steigt f streng auf $(-\infty, 0)$ und $(2, \infty)$ und fällt streng auf $(0, 2)$.

1.3 BF Krümmung

Aufgabe 75 · Krümmung und Wendepunkte

Für $f(x) = x^4 - 6x^2$ ist $f''(x) = 12(x^2 - 1)$. Der Graph ist für $x < -1$ und $x > 1$ linksgekrümmt beziehungsweise konvex und für $-1 < x < 1$ rechtsgekrümmt beziehungsweise konkav. Die Wendepunkte lauten

$$W_1(-1 | -5), \quad W_2(1 | -5).$$

1.4 BF Tangentenprobleme

Aufgabe 76 · Tangente und Normale

Die Parabel $f(x) = x^2 - 2x + 1$ schneidet die y-Achse in $P(0|1)$. Wegen $f'(0) = -2$ gilt

$$t: y = -2x + 1, \quad n: y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Aufgabe 77 · Tangente an eine Exponentialfunktion

Für $f_a(x) = e^{ax^2}$ gilt $f'_a(x) = 2axe^{ax^2}$. Am Punkt $P_a(1|e^a)$ folgt

$$t_a(x) = 2ae^a(x - 1) + e^a = 2ae^ax + e^a(1 - 2a).$$

1.5 BF/LF Kurvendiskussion

Aufgabe 78 · Gebrochenrationale Funktion

Für $f(x) = (-5x^2 + 5)/x^3 = -5/x + 5/x^3$ ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Nullstellen: $x = \pm 1$; Polgerade: $x = 0$; waagrechte Asymptote: $y = 0$.

$$f'(x) = \frac{5(x^2 - 3)}{x^4}, \quad f''(x) = \frac{10(6 - x^2)}{x^5}, \quad f'''(x) = \frac{30(x^2 - 10)}{x^6}.$$

$$H\left(-\sqrt{3} \mid \frac{10}{3\sqrt{3}}\right), \quad T\left(\sqrt{3} \mid -\frac{10}{3\sqrt{3}}\right).$$

$$W_1\left(-\sqrt{6} \mid \frac{25}{6\sqrt{6}}\right), \quad W_2\left(\sqrt{6} \mid -\frac{25}{6\sqrt{6}}\right).$$

Der Graph ist auf $(-\infty, -\sqrt{6})$ und $(0, \sqrt{6})$ konvex, auf $(-\sqrt{6}, 0)$ und $(\sqrt{6}, \infty)$ konkav. Der Wertebereich ist $\mathbb{R}$.

Aufgabe 79 · Kanalquerschnitt

Für $f(x) = -x^4/4 + 3x^2/2$ sind die Nullstellen 0 und $\pm\sqrt{6}$. Aus $f'(x) = x(3 - x^2)$ und $f''(x) = 3(1 - x^2)$ folgen

$$T(0|0), \quad H_{1,2}(\pm\sqrt{3}|9/4), \quad W_{1,2}(\pm 1|5/4)$$

△ **Hauptseite**

Der Kanal ist $2\sqrt{6} \approx 4,90$ m breit und $9/4 = 2,25$ m tief.

Die Tangentialbedingung $f'(u) = f(u)/u$ liefert $u = \sqrt{2}$, also $U(\sqrt{2}|2)$ und die Sichtgerade $y = \sqrt{2}x$. Das Auge liegt 1,5 m über dem Randniveau:

$$A\left(\frac{15\sqrt{2}}{8} \mid \frac{15}{4}\right) \approx A(2,65|3,75).$$

Aufgabe 80 · Wurzelfunktion

$$f(x) = 2\sqrt{(x-2)^2 + 4} - 6.$$

Die Funktion besitzt das globale Minimum $T(2|-2)$, kein Maximum und den Wertebereich $[-2, \infty)$.

1.6 BF/LF Wachstum

Aufgabe 81 · Lineare Wertminderung

$V(t) = 120000 - 2400t$. Für $t = 0, \dots, 6$ ergeben sich 120000, 117600, 115200, 112800, 110400, 108000 und 105600 Euro. Nach 20 Jahren gilt **Math input error**.

Aufgabe 82 · Exponentielles Wachstum

Math input error

Die Verdopplungszeit ist $\ln 2 / \ln 1,028 \approx 25,10$ Jahre ab Geburt. Nach dem 18. Geburtstag sind noch etwa 7,10 Jahre zu warten.

Aufgabe 83 · Beschränktes Wachstum im Fischteich

Aus $f(t) = 100 - 60e^{-kt}$ und $f(5) = 80$ folgt $k = \ln 3/5 \approx 0,2197$. Damit ist

$$f(t) \approx 100 - 60e^{-0,22t},$$

wie behauptet.

Aufgabe 84 · Beschränktes Populationswachstum

$$N(t) = 800 - 500 \cdot 0,6^{t/6}.$$

Damit sind $N(12) = 620$ und $N(24) = 735,2$, also rund 735 Tiere. Der Bestand 700 wird nach

$$t = \frac{6 \ln 0,2}{\ln 0,6} \approx 18,76 \text{ Monaten}$$

erreicht. Mit $k = -\ln(0,6)/6$ und $N'(t) = 500ke^{-kt}$ gilt

$$N'(0) \approx 42,57, \quad N'(12) \approx 15,32$$

Tiere pro Monat.

Aufgabe 85 · Logistischer Bestand

Für $N(t) = 50/(1 + ce^{-kt})$ folgt aus $N(0) = 4$ zunächst $c = 11,5$ und aus $N(3) = 8$ die Gleichung $e^{-3k} = 21/46$. Somit

$$N(t) = \frac{50}{1 + 11,5(21/46)^{t/3}}.$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 86 · Logistisches Wachstum einer Blume

Aus $S = 70$, $N(0) = 5$ und $N(60) = 20$ folgen $c = 13$ und $e^{-60k} = 5/26$. Daher

$$N(t) = \frac{70}{1 + 13(5/26)^{t/60}}.$$

Mit $N'(t) = kN(t)(1 - N(t)/70)$ erhält man

$$N'(30) \approx 0,244 \text{ cm/Tag}.$$

1.7 LF Extremwertaufgaben

Aufgabe 87 · Rechteck im Quadrat

Sind x, y die halben Seitenlängen des Rechtecks, gilt nach Drehung des Quadrats $x + y = a/\sqrt{2}$. Somit

$$A(x) = 4x \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x \right).$$

Das Maximum liegt bei $x = y = a/(2\sqrt{2})$. Das Rechteck ist ein Quadrat mit Seitenlänge $a/\sqrt{2}$ und $A_{\max} = a^2/2$.

Aufgabe 88 · Offene Zylindertonne

Bei $V = 0,2 \text{ m}^3$ ist $M(r) = \pi r^2 + 2V/r$. Aus $M'(r) = 0$ folgt

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \approx 0,399 \text{ m}.$$

Der Durchmesser beträgt etwa 0,798 m.

Aufgabe 89 · Achsenabschnittsdreieck

Die Achsenabschnitte sind $x_X = 4 + 4/(3t)$ und $y_Y = 12t + 4$. Daher

$$A(t) = \frac{1}{2} x_X y_Y = 24t + 16 + \frac{8}{3t}.$$

Aus $A'(t) = 0$ folgt $t = 1/3$ und $A_{\min} = 32$.

Aufgabe 90 · V-förmige Dachrinne

Bei 20 cm Brettbreite und oberem Abstand x ist

$$A(x) = \frac{x}{4} \sqrt{1600 - x^2}, \quad 0 < x < 40.$$

Das Maximum liegt bei $x = 20\sqrt{2}$ cm. Dann gilt $A_{\max} = 200 \text{ cm}^2$ und der Winkel zwischen den Brettern beträgt 90° .

Aufgabe 91 · Kegel aus einer Kreisscheibe

Sei R der Papierradius und $\beta = 2\pi - \alpha$ der verbleibende Winkel. Aus $2\pi r = R\beta$ und $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ wird $V = \pi r^2 h/3$ für $r/R = \sqrt{2/3}$ maximal. Auszuschneiden ist daher

$$\alpha = 360^\circ \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 66,06^\circ.$$

[Hauptseite](#)

1.8 LF Parameterfunktionen

Aufgabe 92 · Quadratische Funktionenschar

Für $f_t(x) = x^2 - (2 - t)x + 0,2t$ ist

$$x_T = 1 - \frac{t}{2}, \quad y_T = 0,2t - \frac{(2 - t)^2}{4}.$$

Mit $t = 2 - 2x_T$ erhält man die Ortskurve $y = -x^2 - 0,4x + 0,4$. Alle Graphen gehen durch $P(-0,2|0,44)$.

Die Tiefpunkte für $t = -1, 1, 3, 5$ sind der Reihe nach

$$T(1,5|-2,45), \quad T(0,5|-0,05), \quad T(-0,5|0,35), \quad T(-1,5|-1,25).$$

1.9 BF/LF/ST Integralrechnung

Aufgabe 93 · Bestimmtes Integral einer Potenzfunktion

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 94 · Bestimmtes Integral einer Polynomfunktion

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 5x \right]_1^2 = \frac{49}{12}.$$

Aufgabe 95 · Flächeninhalt einer Sinushalbwelle

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

Aufgabe 96 · Nachweis einer Stammfunktion

Für $F(x) = x \ln \frac{x}{4-x} + 4 \ln(4-x)$ mit $0 < x < 4$ ergibt Ableiten

$$F'(x) = \ln \frac{x}{4-x} + x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x} \right) - \frac{4}{4-x} = \ln \frac{x}{4-x}.$$

Aufgabe 97 · Exponentialfunktion und Polynom

$$\int_0^1 (3e^x - 2x) dx = 3e - 4,$$

Aufgabe 98 · Integral der Sinusfunktion

$$\int_0^\pi 4 \sin x dx = 8.$$

Aufgabe 99 · Integral der Kosinusfunktion

[Hauptseite](#)

$$\int_{-\pi/2}^0 \cos x \, dx = 1.$$

Aufgabe 100 · Uneigentliches Integral

Das uneigentliche Integral über $2/x$ existiert nicht, denn die Teilintegrale divergieren getrennt:

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{x} \, dx = -\infty, \quad \int_0^1 \frac{2}{x} \, dx = +\infty.$$

Der Cauchy-Hauptwert 0 ist nicht der Wert des uneigentlichen Integrals.

Aufgabe 101 · Integral einer Exponentialfunktion

$$\int_0^{\ln 2} 2e^{-2x} \, dx = [-e^{-2x}]_0^{\ln 2} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 102 · Integration durch Substitution

$$\int x \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C,$$

Aufgabe 103 · Integration durch Substitution

$$\int (2x-3)^6 \, dx = \frac{(2x-3)^7}{14} + C,$$

Aufgabe 104 · Partielle Integration

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C, \quad x > 0,$$

Aufgabe 105 · Partielle Integration

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C,$$

Aufgabe 106 · Weiteres Integral

$$\int \frac{1}{8x} \, dx = \frac{1}{8} \ln |x| + C.$$

1.10 BF/LF Flächenberechnungen

Aufgabe 107 · Fläche unter einer Parabel

Da $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$, gilt

$$A = \int_0^3 (x^2 - 2x + 3) \, dx = 9.$$

Aufgabe 108 · Fläche einer Polynomfunktion

[Hauptseite](#)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x + 2)(x - 1)(x - 4).$$

Im Intervall $[-2, 5, 3]$ liegen die Nullstellen -2 und 1 . Somit

$$A = - \int_{-2,5}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = \frac{2361}{64} \approx 36,89.$$

Aufgabe 109 · Parameterfläche

Für $f_a(x) = a(1 - x^2)$ mit $a \geq 0$ gilt

$$A(a) = a \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}a.$$

Aus $A = 4$ folgt $a = 3$.

Aufgabe 110 · Fläche zwischen Parabel und Gerade

Die Schnittstellen sind

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Die Parabel liegt dazwischen oberhalb der Geraden. Daher

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 \right) dx = \frac{41\sqrt{41}}{12} \approx 21,88.$$

Aufgabe 111 · Fläche zwischen zwei Polynomkurven

Die kubische Kurve wird wegen des doppelten Bezeichners in der Vorlage als y_2 gelesen. Es gilt

$$y_2 - y_1 = 2x^3 - 14,5x^2 + 24,75x = 2x(x - 2,75)(x - 4,5).$$

Somit

$$A = \int_0^{2,75} (y_2 - y_1) dx - \int_{2,75}^{4,5} (y_2 - y_1) dx = \frac{21611}{768} \approx 28,14.$$

Aufgabe 112 · Glaskörper

Aus der Abbildung liest man $0 \leq x \leq 5$, $g(x) = x/2 + 1$ und $f(x) = 3\sqrt{x-1}/2$ für $1 \leq x \leq 5$ ab. Die graue Fläche ist

$$A = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^5 (g(x) - f(x)) dx = \frac{13}{4}.$$

Bei der Rotation um die x-Achse gilt

$$V = \pi \int_0^5 g(x)^2 dx - \pi \int_1^5 f(x)^2 dx = \frac{119\pi}{12}.$$

Aufgabe 113 · Rechteck und Wurzelkurve

$$A_1 = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{14}{3}, \quad A_2 = 6 - A_1 = \frac{4}{3}.$$

Damit ist $A_1 : A_2 = 7 : 2$.

Aufgabe 114 · Funktion und Ableitung

[Hauptseite](#)

In der Abbildung ist f die nichtnegative Kurve; f' ist vor dem Hochpunkt positiv, dort null und danach negativ. Für $f(x) = 2x^2e^{-x}$ gilt

$$f'(x) = 2xe^{-x}(2-x), \quad H\left(2 \mid \frac{8}{e^2}\right).$$

Für $f(x) = a$ auf $\mathbb{R}$ ergibt sich: keine Lösung für $a < 0$, eine für $a = 0$, drei für $0 < a < 8/e^2$, zwei für $a = 8/e^2$ und eine für $a > 8/e^2$.

Durch Ableiten bestätigt man $F(x) = -2(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ als Stammfunktion. Im ersten Quadranten schneiden sich f und f' bei $x = 0$ und $x = 1$. Die eingeschlossene Fläche ist

$$A = \int_0^1 (f'(x) - f(x)) dx = \frac{12}{e} - 4 \approx 0,415.$$

1.11 LF Rotationsvolumen

Aufgabe 115 · Rotation der Kosinusfläche

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Aufgabe 116 · Rotation um die y-Achse

Für $f(x) = 0,1x^2$ auf $[2, 5]$ liefert die Zylinderschalenmethode

$$V = 2\pi \int_2^5 xf(x) dx = \frac{609\pi}{20}.$$

Aufgabe 117 · Herleitung

Bei der Rotation um die x-Achse entstehen Kreisscheiben mit Querschnitt $\pi f(x)^2$; bei der Rotation um die y-Achse entstehen Zylinderschalen mit Umfang $2\pi x$ und Höhe $f(x)$. Im Grenzübergang folgt

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx, \quad V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

1.12 LF Integralfunktionen

Aufgabe 118 · Arbeit im Gravitationsfeld

$$W = \int_{r_0}^{\infty} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma mM \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{\gamma mM}{r_0}.$$

Aufgabe 119 · Gleichung mit variablem Integral

$$\int_{-x}^x (e^{-t} + e^t) dt = 2(e^x - e^{-x}) = 2.$$

Also ist $\sinh x = 1/2$ und

$$x = \operatorname{arsinh} \frac{1}{2} = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 120 · Verteilungsfunktion

Für $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ gilt $F'(x) = f(x) > 0$. Der Graph steigt streng von der waagrechten Asymptote $F = 0$ zur Asymptote $F = 1$. Bei $x = \mu$ liegt der Wendepunkt und $F(\mu) = 1/2$.

Aufgabe 121 · Integralfunktion zu einer Parabel

Aus der Abbildung folgen die Nullstellen 1 und 5 sowie der Scheitel (3|2). Daher

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2},$$

$$J_0(x) = \int_0^x f(t) dt = -\frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x.$$

J_0 fällt auf $[0, 1]$, steigt auf $[1, 5]$ und fällt auf $[5, 6]$. Markante Werte sind

$$J_0(0) = 0, \quad J_0(1) = -\frac{7}{6}, \quad J_0(3) = \frac{3}{2}, \quad J_0(5) = \frac{25}{6}, \quad J_0(6) = 3.$$

1.13 LF Uneigentliches Integral

Aufgabe 122 · Begrenzte Fläche mit unendlicher Ausdehnung

Durch Ableiten erhält man

$$\frac{d}{dx} [-e^{-2x}(x+1,5)] = 2(x+1)e^{-2x} = f(x).$$

Im ersten Quadranten liegt die Fläche bis $x = 1$ zwischen f und der Wendetangente $y = 2 - 2x$, danach zwischen f und der x-Achse. Daher

$$A(k) = \int_0^1 (f(x) - (2 - 2x)) dx + \int_1^k f(x) dx = \frac{1}{2} - (k+1,5)e^{-2k}.$$

Somit gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = 1/2$; die Fläche bleibt beschränkt.

1.14 BF/LF Rekonstruktion einer Größe

Aufgabe 123 · Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Aus dem Diagramm liest man $v(t) = 5 + 0,5t$ ab. Somit

$$s(8) - s(0) = \int_0^8 (5 + 0,5t) dt = 56 \text{ m}.$$

Allgemein wächst die Strecke um $5t + 0,25t^2$ und geht für $t \rightarrow \infty$ gegen unendlich.

Aufgabe 124 · Federpendel

Aus $a(t) = -\omega \cos(\omega t)$ erhält man

$$v(t) = -\sin(\omega t) + C_1, \quad s(t) = \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + C_1 t + C_2$$

[Hauptseite](#)

Ohne Anfangsbedingungen bleiben die Integrationskonstanten unbestimmt.

Aufgabe 125 · Temperaturverlauf

Für $f(t) = \cos(\pi t/12 - \pi)$ fällt die Temperatur von 0 bis 6 Uhr, steigt von 6 bis 18 Uhr und fällt danach bis 24 Uhr. Am schnellsten steigt sie um 12 Uhr; die stärkste Abnahme liegt um 0 beziehungsweise 24 Uhr vor. Minimum: 6 Uhr; Maximum: 18 Uhr.

$$T(t) = \frac{12}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \pi\right) + C.$$

Aus $T(12) = 20$ folgt $C = 20$ und $T(18) = 20 + 12/\pi \approx 23,82^\circ\text{C}$.

Aufgabe 126 · Wasserbecken

Eine Flächenabschätzung unter dem gegebenen Zuflussgraphen ergibt in den ersten drei Stunden etwa $9,5 \text{ m}^3$. Bei 5 m^2 Grundfläche steigt die Wasserhöhe bis $t = 3$ auf ungefähr 1,9 m und fällt danach wegen der negativen Rate wieder. Die Steigung des Höhengraphen ist stets ein Fünftel der Zu- beziehungsweise Abflussrate.

Aufgabe 127 · Weg aus der Geschwindigkeit

$$s(t_1) = s_0 + \int_0^{t_1} at \, dt = s_0 + \frac{1}{2}at_1^2.$$

1.15 Mittelwert einer Funktion

Aufgabe 128 · Durchschnittsgeschwindigkeit

Bei linearer Zunahme von 0 auf 100 km/h ist $\bar{v} = 50 \text{ km/h}$.

Aufgabe 129 · Durchschnittlicher Verkaufspreis

Math input error

Aufgabe 130 · Durchschnittlicher Absatz

Ableiten bestätigt $A(t) = -100e^{-0,1t}(t + 10)$ als Stammfunktion von $a(t) = 10te^{-0,1t}$. Damit

$$\bar{a} = \frac{A(24) - A(0)}{24} = \frac{1000 - 3400e^{-2,4}}{24} \approx 28,81$$

in den angegebenen Tausender-Einheiten pro Monat.

1.16 Funktionsgleichungen bestimmen

Aufgabe 131 · Funktion aus dem Schaubild

Aus dem Schaubild liest man die Nullstellen $-3, 1, 2$ und $f(0) = 6$ ab. Somit

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2) = x^3 - 7x + 6,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 7,$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 6x + 4,$$

[Hauptseite](#)

wobei $F(0) = 4$.

Aufgabe 132 · Exponentialfunktion mit Null- und Wendestelle

Aus der Nullstelle 1 folgt $a = -1$. Für $f(x) = (x - 1)e^{kx}$ ist

$$f''(x) = e^{kx}(2k + k^2(x - 1)).$$

Die Wendestelle -3 liefert wegen $k \neq 0$ den Wert $k = 1/2$. Daher

$$f(x) = (x - 1)e^{x/2}.$$

Aufgabe 133 · Beispiele zu Eigenschaften

- $f(x) = -(x - 4)^2$ steigt bis $x = 4$ und fällt danach.
- $f(x) = -(x^2 - 4)^2$ auf $[-5, 5]$ besitzt lokale Maxima bei $x = \pm 2$ und ein lokales Minimum bei $x = 0$.
- $f(x) = x^3 - 3x$ besitzt ein lokales Maximum und Minimum, ist aber nach oben und unten unbeschränkt und hat daher keine globalen Extremwerte.

Aufgabe 134 · Verlauf aus Linearfaktoren

Für $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2(x - 5)^3/100$ gilt: Bei $x = -1$ schneidet der Graph die x-Achse, bei $x = 1$ berührt er sie ohne Vorzeichenwechsel, und bei $x = 5$ schneidet er sie mit waagrechter Tangente. Grad 6 und positiver Leitkoeffizient ergeben $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

Aufgabe 135 · Zerlegung in Linearfaktoren

Die Nullstelle $x = 1$ liefert durch Horner-Schema oder Polynomdivision

$$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x - 1)(x^2 - 2x - 15).$$

Also

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 3)(x - 1)(x - 5).$$

Der Wendepunkt ist $(1|0)$. Die Extrempunkte sind

$$H\left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \mid \frac{128\sqrt{3}}{27}\right), \quad T\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \mid -\frac{128\sqrt{3}}{27}\right).$$

Aufgabe 136 · Kubische Funktion

Für $f(x) = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 12x + 7,5$ liegen die stationären Stellen bei 2 und 4. Da $f(2) = -2,5$ und $f(4) = -0,5$, liegen beide Extrempunkte unter der x-Achse. Mit dem Endverhalten folgt, dass der Graph die x-Achse genau einmal schneidet.

Aus $f''(x) = -3x + 9$ folgt der Wendepunkt $W(3 \mid -1,5)$.

Aufgabe 137 · Bogenlänge einer ebenen Kurve

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (\Delta y / \Delta x)^2} \Delta x.$$

Im Grenzübergang folgt für stetig differenzierbares f

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Für $f(x) = x^2$ auf $[0, 3]$ gilt

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{3}{2} \sqrt{37} + \frac{1}{4} \ln(6 + \sqrt{37}) \approx 9,747.$$

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

2.1 BF/LF Vektoren

Aufgabe 138 · Umsatz

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 18 \\ 34 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Der Umsatz ist das Skalarprodukt

Math input error

Aufgabe 139 · Vektorlänge

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

Aufgabe 140 · Wegbeschreibung

Der Zielvektor ist

$$\vec{z} = \vec{v} + 2\vec{w} - \frac{1}{2}(\vec{w} - \vec{x}) + 2,5\vec{y} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}.$$

Der Zielpunkt lautet daher $Z(-0,5|3,5)$.

Aufgabe 141 · Winkel zweier Geschwindigkeiten

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{18}{5\sqrt{13}}, \quad \alpha \approx 3,18^\circ.$$

Aufgabe 142 · Lorentzkraft

$$\vec{v} \times \vec{B} = 10^6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ folgt

$$\vec{F}_L = 10^{-13} \begin{pmatrix} -1,6 \\ 1,6 \\ 1,6 \end{pmatrix} \text{ N}, \quad \|\vec{F}_L\| = 1,6\sqrt{3} \cdot 10^{-13} \text{ N}.$$

Aufgabe 143 · Fehlende Koordinaten

a. Aus $a/\sqrt{2+a^2} = \cos 45^\circ$ und dem positiven Kosinus folgt $a = \sqrt{2}$.

b. Aus $0,5c/(\sqrt{0,5}\sqrt{1+c^2}) = \cos 60^\circ$ folgt wegen des positiven Kosinus $c = 1$.

Aufgabe 144 · Linearkombination

Aus $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{a}$ folgen $\lambda = 2$ und $\mu = 1$. Somit

$$\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}.$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 145 · Vertauschung beim Vektorprodukt

Komponentenweises Ausrechnen zeigt

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Aufgabe 146 · Mittelpunkt einer Strecke

Der Ortsvektor des Mittelpunkts ist der Mittelwert der beiden Ortsvektoren:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Damit

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2} \mid \frac{a_2 + b_2}{2} \mid \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

Aufgabe 147 · Waagerechter Wurf

Durch komponentenweises Differenzieren erhält man

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{a}$ zeigt stets senkrecht nach unten; $\vec{v}$ besitzt eine konstante waagrechte und eine betragsmäßig wachsende abwärts gerichtete Komponente.

Aufgabe 148 · Arbeit im Schwerfeld

Die Höhendifferenz zwischen $\vec{a} = (1, 2, 0)$ und $\vec{b} = (3, 1, 2)$ beträgt 2 m. Daher

$$W = mg\Delta h = 2mg = 19,62m \text{ J}.$$

Aufgabe 149 · Lineare Abhängigkeit

Es gilt

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Die drei Vektoren sind somit linear abhängig.

Aufgabe 150 · Dreiecksfläche und Arbeit

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit beträgt der Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 3\sqrt{6} \approx 7,35.$$

Bei $\Delta\vec{s} = (5, 0, 0)$ ist

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = 25 \text{ J.}$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 151 · Resultierende Kraft

Die Summe der vier Kraftkomponenten ist

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_{i=1}^4 F_i \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 87,69 \\ 199,41 \end{pmatrix} \text{ N.}$$

Somit

$$\|\vec{F}_{\text{res}}\| \approx 217,84 \text{ N, } \alpha \approx 66,26^\circ.$$

Aufgabe 152 · Normieren

Da $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 9$, gilt

$$\hat{u} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \hat{v} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 153 · Vektorausdruck

Wegen $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ist

$$\frac{1}{2} (\vec{a} \times (2\vec{b} + 3\vec{a})) - (\vec{b} \times \vec{a}) = 2(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Aufgabe 154 · Skalarprodukt

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos 30^\circ - \|\vec{a}\|^2 = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}.$$

2.2 BF/LF Geraden

Aufgabe 155 · Koordinatenform

Aus $x_1 = \lambda$ und $x_2 = 5/3 - 4\lambda/3$ folgt

$$g: 4x_1 + 3x_2 = 5.$$

Die Hessesche Normalform ist $(4x_1 + 3x_2 - 5)/5 = 0$.

Aufgabe 156 · Hessesche Normalform, Schnittpunkt und Winkel

Für g_1 gilt $2x_1 - x_2 = 0$, für g_2 gilt $x_1 - x_2 - 1 = 0$. Hessesche Normalformen sind

$$\frac{2x_1 - x_2}{\sqrt{5}} = 0, \quad \text{quad} \quad \frac{x_1 - x_2 - 1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Einsetzen von $(x_1, x_2) = (\lambda, 2\lambda)$ in g_2 liefert $\lambda = -1$ und damit $S(-1 | -2)$.

Mit den Richtungsvektoren $(1, 2)$ und $(1, 1)$ ist

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \text{quad} \quad \alpha \approx 18,43^\circ.$$

Aufgabe 157 · Parallelogramm und Kreis

[Hauptseite](#)

Es gilt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (-3, 1, 4), \text{quad} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (5, -5, 0).$$

Das Viereck ist ein Parallelogramm. Da $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -20 \neq 0$, ist es kein Rechteck.

Für den Kreis mit Durchmesser AC gilt

$$M(1|-2|2), \text{quad} r = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\| = 3.$$

Aufgabe 158 · Rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck

Sei $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{d}$ und A nicht auf g . Zunächst wird der Lotfuß

$$H = \vec{p} + \frac{(\vec{A} - \vec{p}) \cdot \vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{d}} \vec{d}$$

bestimmt. Soll der rechte Winkel bei A liegen, wählt man auf g die Punkte

$$B = H - \frac{\|A - H\|}{\|\vec{d}\|} \vec{d}, \text{quad} C = H + \frac{\|A - H\|}{\|\vec{d}\|} \vec{d}.$$

Dann ist $AB = AC$ und $AB \perp AC$. Liegt der rechte Winkel bei einem Punkt der Geraden, ist dieser Punkt H ; der zweite Geradenpunkt wird im Abstand AH von H gewählt.

Aufgabe 159 · Gerade durch zwei Punkte

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für $R(3|1|-1)$ müsste aus der ersten Koordinate $t = -2$ gelten; die dritte Koordinate wäre dann -7 . Also liegt R nicht auf g .

Aufgabe 160 · Zwei Geraden und ihre Ebene

Die Geraden schneiden sich in $S = (0, 0, 1)$. Mit den Richtungsvektoren $(-1, 2, 2)$ und $(-1, 0, 1)$ ergibt das Kreuzprodukt den Normalenvektor $(2, -1, 2)$. Somit

$$E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.$$

Auf g ist der Abstand zu S gleich $3|s|$. Für Abstand 12 gilt $s = \pm 4$; die Punkte sind

$$A = (-4, 8, 9), \quad B = (4, -8, -7).$$

Ein Punkt $(x, 0, 0)$ auf der x-Achse hat Abstand $|2x - 2|/3$ von E . Aus $|2x - 2|/3 = 3$ folgen

$$\left(\frac{11}{2}, 0, 0\right), \quad \left(-\frac{7}{2}, 0, 0\right).$$

Aufgabe 161 · Spurpunktebene

Eine Parameterform ist

$$E^p : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Koordinaten- und Normalenform lauten

$$E^k : x_1 - x_2 + x_3 = 3,$$

$$E^n : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 162 · Schnitt zweier Ebenen

Die Normalen $(6, -1, -4)$ und $(-3, 5, 2)$ sind nicht proportional; daher sind die Ebenen nicht identisch. Die Schnittgerade durch A und B ist

$$s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ein weiterer gemeinsamer Punkt ist beispielsweise $(-2, 0, -6)$.

Teilt man die Gleichung von E_1 durch -2 , erhält man

$$-3x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = -6.$$

In E_2 muss daher nur der Koeffizient von x_2 von 5 auf $1/2$ geändert werden.

2.4 BF/LF Gegenseitige Lage**Aufgabe 163 · Geraden im Quader**

Aus der Abbildung ist K der Mittelpunkt der Kante AE und L der Mittelpunkt der oberen Seitenfläche $DCGH$:

$$K = (-1, 1, -3), \quad L = (-1, 5, 3).$$

Der Mittelpunkt von AB ist $M_{AB} = (2, 5, -3)$. Damit

$$j : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Richtungsvektoren sind nicht proportional. Beim Gleichsetzen erhält man $t = s = 1$ und damit den gemeinsamen Punkt $S = (-1, 3, 0)$. Die Geraden schneiden sich.

Aufgabe 164 · Parallele Geraden

[Hauptseite](#)

Die Richtungsvektoren erfüllen $(-2, -1, 3) = -\frac{1}{2}(4, 2, -6)$. Der Verbindungsvektor der Stützpunkte $(0, -1, 0)$ ist nicht proportional zu ihnen. Daher sind g und h echt parallel.

Aufgabe 165 · Gleichschenkliges Dreieck

$$\overrightarrow{CA} = (-4, -4, 2), \quad \overrightarrow{CB} = (4, 2, 4), \quad |CA| = |CB| = 6.$$

Damit ist das Dreieck gleichschenkelig mit Basis AB . Für den Spitzenwinkel bei C gilt

$$\cos \gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{36} = -\frac{4}{9}, \quad \gamma \approx 116,39^\circ.$$

Der Schwerpunkt lautet

$$S\left(3 \mid \frac{13}{3} \mid 1\right).$$

Aufgabe 166 · Punkt, Gerade und Ebene

Die Ebene besitzt die Gleichung

$$E: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10.$$

Eine senkrechte Gerade durch Q ist

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen liefert $t = -19/14$ und

$$S\left(\frac{23}{7} \mid \frac{13}{14} \mid \frac{9}{14}\right), \quad d(Q, E) = \frac{19}{\sqrt{14}}.$$

Die Achsenschnittpunkte sind $(5, 0, 0)$, $(0, 10/3, 0)$ und $(0, 0, 10)$. Die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen können etwa so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_3 = 0: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 = 0: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ x_1 = 0: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.5 BF/LF Abstandsberechnungen

Aufgabe 167 · Abstand paralleler Ebenen

Die Richtungsvektoren von F besitzen das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

[Hauptseite](#)

Dies ist der Normalenvektor von $\bar{E}$; die Ebenen sind parallel. Mit $P_F = (3, 0, 2)$ folgt

$$d(E, F) = \frac{|(P_F - (3, 1, 0)) \cdot (4, 4, -2)|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}.$$

Aufgabe 168 · Abstand paralleler Geraden

Die Richtungsvektoren sind entgegengesetzt, also sind die Geraden parallel. Für $P_g = (-1, 1, 7)$, $P_h = (-2, 7, 0)$ und $\vec{d} = (-5, 4, -3)$ gilt

$$d(g, h) = \frac{\|(P_h - P_g) \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{\|(10, 32, 26)\|}{\sqrt{50}} = 6.$$

Aufgabe 169 · Gerade und Ebene

Einsetzen der Geraden in die linke Seite der Ebenengleichung ergibt unabhängig von r

$$2(6 + 3r) - 2r + 2(-2r) = 12.$$

Da $12 \neq 6$, liegt g echt parallel zu $\bar{E}$. Der Ursprung besitzt den Abstand

$$d(O, E) = \frac{|0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 2.$$

Aufgabe 170 · Ebene durch ein Dreieck und Parallelebene

Die Punkte A, B, C aus Abschnitt 2.4 bestimmen

$$E_1 : 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 13 = 0.$$

Für $Q = (4, 0, -16)$ gilt

$$d(Q, E_1) = \frac{|20 + 32 + 13|}{\sqrt{25 + 36 + 4}} = \sqrt{65}.$$

Beim Ursprung und bei Q ist die linke Seite der Ebenengleichung positiv; beide liegen auf derselben Seite. Eine parallele Ebene durch Q ist

$$E_2 : 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 52 = 0.$$

Der Stützpunkt $(4, -5, -1)$ der Geraden erfüllt die Gleichung von E_2 , und für ihren Richtungsvektor gilt

$$5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 0.$$

Damit liegt die gesamte Gerade in E_2 .

Aufgabe 171 · Vorgegebener Punkt-Ebene-Abstand

Für $P = (3, u, 0)$ gilt

$$\frac{|2 \cdot 3 + u - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 5 \iff |u + 2| = 15.$$

Somit ist $u = 13$ oder $u = -17$.

Aufgabe 172 · Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Mit $\vec{n} = (3, -2, 2)$ und $\vec{d} = (2, 5, 3)$ gilt

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{d}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{d}\|} = \frac{2}{\sqrt{17} \sqrt{38}}, \text{ also } \alpha \approx 4,51^\circ.$$

Aufgabe 173 · Dachflächen des ersten Hauses

Wir wählen die x-Achse quer über die 10 m breite Front, die y-Achse in Richtung der 8 m langen Hausseite und die z-Achse senkrecht. Aus der Abbildung ergeben sich für die linke Dachhälfte ein Anstieg von 1,5 m auf 6 m Breite und für die rechte ein Abfall von 4 m auf 4 m Breite. Passende Normalen sind

$$\vec{n}_L = (1, 0, -4), \quad \vec{n}_R = (1, 0, 1).$$

Der Schnittwinkel der Dachflächen ist

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_L \cdot \vec{n}_R|}{\|\vec{n}_L\| \|\vec{n}_R\|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 59,04^\circ.$$

Die zugehörigen Innenwinkel unter dem Dach ergänzen sich dazu auf 180° , also etwa $120,96^\circ$. Mit den senkrechten Seitenwänden ergeben sich links etwa $75,96^\circ$ und rechts 45° . Zu den vorderen und hinteren Giebelwänden stehen beide Dachflächen senkrecht.

Aufgabe 174 · Gerade und Ebene

Die Ebene lautet

$$E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 = 0.$$

Ihr Abstand vom Ursprung ist $1/\sqrt{14}$. Einsetzen von

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

liefert $12 - 3t = 0$, also $t = 4$ und

$$S = (1, 1, -2).$$

Der Schnittwinkel erfüllt

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{14} \sqrt{2}}, \text{ also } \alpha \approx 34,54^\circ.$$

Da $\vec{F}$ orthogonal zu $\vec{g}$ ist, kann der Richtungsvektor von $\vec{g}$ als Normalenvektor verwendet werden. Durch $\vec{A} = (-5, 0, 1)$ ergibt sich

$$F: x_2 - x_3 + 1 = 0.$$

$\vec{F}$ ist parallel zur x_1 -Achse. Die Normalen von $\vec{E}$ und $\vec{F}$ sind nicht proportional, also schneiden sich die Ebenen in einer Geraden.

Aufgabe 175 · Koordinatenebenen

Die Normalen von $x_2 = 3$ und $x_1 = 5$ sind $(0, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$. Ihr Skalarprodukt ist null; der Schnittwinkel beträgt 90° .

Aufgabe 176 · Dachfläche des zweiten Hauses

[Hauptseite](#)

Wir legen den Ursprung in eine untere Ecke der vorderen Giebelwand, die x-Achse entlang ihrer 6 m breiten Grundkante und die z-Achse senkrecht. Traufhöhe 3 m, Gesamthöhe 6 m und halbe Giebelbreite 3 m ergeben im Giebelquerschnitt ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Die vordere Dachfläche schließt daher mit der senkrechten vorderen Hauswand den Winkel

$$45^\circ$$

ein.

Aufgabe 177 · Zwei Ebenen, Lot und gemeinsame Senkrechte

Aus den Spannvektoren von E_2 folgt der Normalenvektor $(2, -1, 0)$ und damit

$$E_2 : 2x_1 - x_2 = 5.$$

Zusammen mit $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3$ ergibt sich

$$s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $P = (1, -3, -8)$ erfüllt E_2 . Sein Abstand von E_1 ist

$$d(P, E_1) = \frac{|2 + 3 + 16 - 3|}{3} = 6.$$

Der Lotfuß auf E_1 ist

$$F = P - \frac{18}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-3, -1, -4).$$

Auf der Geraden PF hat ein Punkt die Form $P + \lambda(F - P)$. Die Bedingung $x_3 = -2$ liefert $\lambda = 3/2$ und

$$T = (-5, 0, -2).$$

T liegt damit nicht innerhalb der Strecke PF , sondern teilt sie äußerlich im Betragsverhältnis $PT : TF = 3 : 1$. Die Formulierung „teilt die Strecke“ ist an dieser Stelle der Vorlage ungenau.

Die orthogonale Projektion von F auf s ist $H = (1, -3, 1)$. Daher ist eine gesuchte Gerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ihr Richtungsvektor ist orthogonal zu $(1, 2, 0)$, und der Schnittpunkt von h und s ist $H = (1, -3, 1)$.

Aufgabe 178 · Ebene senkrecht zu einer Geraden

Der Richtungsvektor $(0, 1, 0)$ von g ist ein Normalenvektor der gesuchten Ebene durch $P = (2, 3, 4)$. Damit

$$E : x_2 = 3.$$

Für $\lambda = 3$ schneidet g diese Ebene in $(1, 3, -1)$.

Aufgabe 179 · Parallelebene durch Q

Zu $E_1 : 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 13 = 0$ ist die Ebene

$$E_2 : 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 52 = 0$$

[Hauptseite](#)

parallel und enthält $Q = (4, 0, -16)$. Der Stützpunkt der angegebenen Geraden erfüllt E_2 , und ihr Richtungsvektor ist orthogonal zum Normalenvektor. Daher liegt g in E_2 .

Aufgabe 180 · Kollinearität und Koplanarität

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -4, 8), \quad \overrightarrow{AC} = (-5, -1, 9).$$

Die Vektoren sind nicht proportional; A, B, C liegen nicht auf einer Geraden. Weiter ist

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 296 \neq 0.$$

Die vier Punkte liegen daher nicht in einer Ebene.

Aufgabe 181 · Ebene, Gerade und Lot

Für $t = 2$ ergibt die Gerade den Punkt $P = (6, 3, 2)$; also liegt P auf g . Einsetzen von g in $E : 2x - y + z + 1 = 0$ liefert $6 + 3t = 0$. Somit ist der Schnittpunkt

$$S = (2, 3, -2).$$

Mit $\vec{n} = (2, -1, 1)$ erhält man für P

$$F = P - \frac{12}{6}\vec{n} = (2, 5, 0), \quad d(P, E) = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

Für den Winkel zwischen g mit $\vec{d} = (1, 0, 1)$ und E gilt

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{d}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{d}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also $\alpha = 60^\circ$.

Aufgabe 182 · Tetraeder

$$\overrightarrow{AB} = (0, 3, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (4, -1, 1).$$

Beide Vektoren haben die Länge $3\sqrt{2}$ und ihr Skalarprodukt ist null. Das Dreieck ist bei A rechtwinklig und gleichschenkelig. Ein Normalenvektor ist $(1, 2, -2)$, somit

$$E : x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0.$$

Für $D = (6, 2, 1)$ gilt

$$d(D, E) = \frac{|6 + 4 - 2 + 1|}{3} = 3.$$

Die Grundfläche des Dreiecks ist 9 , daher beträgt das Tetraedervolumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 9.$$

Eine Senkrechte durch $P = (-1, 4, -5)$ ist

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen liefert $t = -2$ und den Schnittpunkt $S = (-3, 0, -1)$.

[Hauptseite](#)

Aufgabe 183 · Halbräume

Für $E: x - 2y + z = 24$ beträgt die linke Seite beim Punkt $P = (2, -2, 1)$ gleich 7, beim Ursprung gleich 0. Beide Werte sind kleiner als 24; die Punkte liegen im selben Halbraum.

2.7 LF Spiegelung

Aufgabe 184 · Spiegelung eines Punktes an einer Geraden

Für den Lotfuß $H = (3, 5, 4) + r(8, -2, -2)$ gilt

$$r = \frac{(P - (3, 5, 4)) \cdot (8, -2, -2)}{(8, -2, -2) \cdot (8, -2, -2)} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist $H = (7, 4, 3)$ und der Bildpunkt

$$P' = 2H - P = (9, 10, 5).$$

Aufgabe 185 · Symmetrie zu einer Ebene

Der Mittelpunkt von $A = (5, 7, 7)$ und $B = (-3, -5, 3)$ ist $M = (1, 1, 5)$ und erfüllt $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$. Außerdem ist

$$\overrightarrow{AB} = (-8, -12, -4) = -4(2, 3, 1),$$

also senkrecht zu E . Daher sind A und B bezüglich E symmetrisch.

Aufgabe 186 · Spiegelung an einer Geraden

Für $A = (4, -3, 7)$ und $g: (4, 12, 1) + \lambda(2, 11, 4)$ ist der Lotparameter

$$\lambda = \frac{(A - (4, 12, 1)) \cdot (2, 11, 4)}{2^2 + 11^2 + 4^2} = -1.$$

Der Lotfuß ist $H = (2, 1, -3)$ und damit

$$A' = 2H - A = (0, 5, -13).$$

Aufgabe 187 · Spiegelung an einer Ebene

Für $E: 2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ liefert $P = (-3, 0, 2)$ den Wert -12 ; der Punkt liegt nicht in E . Mit $\vec{n} = (2, 1, -1)$ folgt

$$P' = P - 2 \frac{-12}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = P + 4\vec{n} = (5, 4, -2).$$

2.8 ST Hyperebenen

Aufgabe 188 · Schnitt zweier affiner Ebenen in $\mathbb{R}^4$

Durch Gleichsetzen der vier Koordinaten erhält man

$$\lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \mu_2 = 0.$$

Der eindeutige Schnittpunkt ist

$$S = (1, 2, 3, 4).$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 189 · Hyperebenen in niedrigen Dimensionen

Eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ besitzt $n - 1$ linear unabhängige Richtungsvektoren.

- Für $n = 1$ gibt es keinen Richtungsvektor. Die Darstellung reduziert sich auf $H = \{\vec{p}\}$; jeder Punkt ist eine Hyperebene.
- Für $n = 2$ gibt es genau einen von null verschiedenen Richtungsvektor. Die Menge $H = \{\vec{p} + \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist eine Gerade; jede Gerade ist daher eine Hyperebene im zweidimensionalen Raum.

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Stochastikaufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

3.1 W Grundlagen

Aufgabe 190 · Stochastische Unabhängigkeit

Von den 14 Jungen sind 7 größer als 1,80 m, von den 16 Mädchen sind es 2. Damit

$$P(E) = \frac{14}{30}, \quad P(F) = \frac{9}{30}, \quad P(E \cap F) = \frac{7}{30}.$$

Da $P(E)P(F) = 7/50 \neq 7/30$, sind die Ereignisse nicht unabhängig. Gleichwertig gilt $P(F | E) = 1/2 \neq 3/10 = P(F)$.

Aufgabe 191 · Additionssatz für drei Ereignisse

Mit dem Additionssatz für zwei Ereignisse folgt

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Dabei ist

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

und wegen $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

Einsetzen ergibt die behauptete Formel.

Aufgabe 192 · Anzahl der Outfits

Nach dem Produktprinzip gibt es

$$23 \cdot 52 \cdot 19 \cdot 61 \cdot 13 = 18\,020\,132$$

verschiedene Kombinationen.

Aufgabe 193 · Relative Häufigkeiten

$$\text{a) } \frac{1}{9}, \text{ b) } \frac{7}{250} = 0,028, \text{ c) } 24\% = \frac{6}{25}, \text{ d) } \frac{3}{8} = 37,5\%.$$

Aufgabe 194 · Folgerungen aus den Kolmogorow-Axiomen

Da E und $\bar{E}$ disjunkt sind und ihre Vereinigung S ist,

$$1 = P(S) = P(E) + P(\bar{E}).$$

Somit $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$. Wegen der Positivität ist $P(\bar{E}) \geq 0$ und daher $P(E) \leq 1$.

Aufgabe 195 · Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Mit Zurücklegen gilt

$$P(E \cap F) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = P(E)P(F).$$

[Hauptseite](#)

Ohne Zurücklegen ist

$$P(E \cap F) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} \neq \frac{6}{25} = P(E)P(F).$$

In diesem Fall ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(F | E) = \frac{1}{2}.$$

3.2 W/BF Mit Wahrscheinlichkeiten rechnen

Aufgabe 196 · Drei Freiwürfe

Mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,6$ gilt

$$P(A) = 1 - 0,4^3 = 0,936.$$

Für mindestens zwei Treffer erhält man

$$P(B) = \binom{3}{2} 0,6^2 \cdot 0,4 + 0,6^3 = 0,648.$$

Aufgabe 197 · Theaterkarten und Vierfeldertafel

Unter den Reihen A bis J kommen aus BACCHUS die vier Buchstaben A, B, C und H vor. Somit umfasst **A** 80 Plätze; **B** umfasst in jeder Reihe die drei Plätze 5, 10 und 12, also 30 Plätze. Die Schnittmenge besitzt $4 \cdot 3 = 12$ Plätze.

	A	$\bar{A}$	Summe
B	12	18	30
$\bar{B}$	68	102	170
Summe	80	120	200

Durch Division durch 200 erhält man die Wahrscheinlichkeitstafel. Für ein kostenloses Ticket gilt

$$P(A \cup B) = \frac{80 + 30 - 12}{200} = \frac{98}{200} = 0,49.$$

Die in der Vorlage abgedruckte Randsumme 140 ist mit der redaktionell präzisierten Aufgabenstellung nicht vereinbar; korrekt ist 120.

Aufgabe 198 · Zwei Urnen

a. In U_1 ist die Wahrscheinlichkeit für gleiche Farben

$$P(RR) + P(BB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}.$$

b. Mit dem Satz von Bayes folgt

$$P(U_1 | R) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 199 · Dreifacher Münzwurf

Für die genaue Reihenfolge Zahl, Zahl, Wappen gilt

$$P(ZZW) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 200 · Prüfautomat für Geldscheine

Die Fälschungsrate beträgt **0,002**. Daher

$$P(B) = 0,002 \cdot 0,95 + 0,998 \cdot 0,10 = 0,1017.$$

Bei einem Blinkalarm ist die Wahrscheinlichkeit einer Fälschung

$$P(F | B) = \frac{0,002 \cdot 0,95}{0,1017} \approx 0,01868 = 1,87\%.$$

Aufgabe 201 · Bauteile von Firma B

$$P(\text{intakt} | B) = \frac{P(\text{intakt} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,23}{0,25} = 0,92.$$

Damit sind 92 % der von B gelieferten Teile intakt.

Aufgabe 202 · Unabhängige Ereignisse

$$P(\text{Regen und pünktlich}) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2.$$

Aufgabe 203 · Hotelzimmer

Die vier unterscheidbaren Zimmer können auf

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Arten vergeben werden. Ein bestimmter Gast erhält mit Wahrscheinlichkeit $4/6 = 2/3$ ein Zimmer. Die Hotelfachfrau tippt die richtige Vierergruppe mit Wahrscheinlichkeit $1/\binom{6}{4} = 1/15$ und liegt daher mit Wahrscheinlichkeit **14/15** falsch.

Aufgabe 204 · Laufwettbewerb

Die Gewichte summieren sich zu 9. Somit

$$P(C) = \frac{1}{9}, \text{quad} P(A \text{ oder } B) = \frac{5+3}{9} = \frac{8}{9}.$$

3.3 Erwartungswert und Standardabweichung

Aufgabe 205 · Glücksrad

Die Zahl 2 ist prim und gerade; dort beträgt Leas Nettogewinn 1 €. Bei den fünf ungeraden Primzahlen gewinnt sie je 3 €, bei den sieben übrigen geraden Zahlen verliert sie je 2 €. Bei 1, 9 und 15 ändert sich nichts. Daher

Math input error

Das Spiel ist nicht fair; Lea gewinnt langfristig im Mittel 12,5 Cent pro Spiel.

Aufgabe 206 · Lage und Streuung

- a. Beide Klassen besitzen dieselbe mittlere Sprunghöhe. In Klasse 8a liegen die Werte wegen $\sigma(A) < \sigma(B)$ enger um diesen Mittelwert; Klasse 8b streut stärker.

b. Ein Beispiel ist $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit

[Hauptseite](#)

$$P(X=0) = 0,8, \text{ und } P(X=k) = 0,05 \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Dann ist $E(X) = 0,5$ und liegt zwischen dem kleinsten Wert 0 und dem zweitkleinsten Wert 1.

Aufgabe 207 · Anzahl der Sechsen

Für $X \sim B(100, 1/6)$ gilt

$$E(X) = \frac{100}{6} \approx 16,67, \text{ und } \sigma(X) = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \approx 3,73.$$

Das reelle 2σ -Intervall ist ungefähr $[9,21; 24,12]$, also für ganzzahliges X die Menge $\{10, \dots, 24\}$. Die exakte Binomialwahrscheinlichkeit dafür beträgt etwa **0,9570** und stimmt gut mit der Sigma-Regel von ungefähr 95,4 % überein.

Aufgabe 208 · Enten fangen

Es gibt einmal 10 € für 00, neunmal 5 € für die übrigen Doppelziffern und neunmal 3 € für die übrigen Zahlen mit Endziffer 0. Der mittlere Gewinn der spielenden Person ist

Math input error

Für einen mittleren Verdienst des Besitzers von 0,50 € muss der Einsatz

Math input error

betragen.

3.4 BF Binomialverteilung

Aufgabe 209 · Bernoulli-Formel und Schätzer

Eine bestimmte Folge mit k Treffern und $n - k$ Nieten hat wegen der Unabhängigkeit die Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$. Es gibt $\binom{n}{k}$ solche Folgen. Daher

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Als Schätzer für p bietet sich die relative Trefferhäufigkeit

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

an.

Aufgabe 210 · Binomialverteilung mit $n = 20, p = 0,9$

Für $X \sim B(20, 0,9)$ gilt

$$\begin{aligned} P(X=16) &\approx 0,089779, \\ P(X \geq 18) &\approx 0,676927, \\ P(X < 14) &\approx 0,002386, \\ P(15 \leq X < 18) &\approx 0,311820, \\ P(X \geq 1) &= 1 - 0,1^{20}. \end{aligned}$$

Aufgabe 211 · Fehlerhafte Bauteile

[Hauptseite](#)

Mit $p = 0,05$ ergibt das Binomialmodell

$$P(E) = \binom{18}{2} 0,05^2 \cdot 0,95^{16} \approx 0,168348.$$

Für F bedeutet „weniger als die Hälfte“ bei zehn Teilen $X \leq 4$:

$$P(F) = \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} 0,05^k 0,95^{10-k} \approx 0,999936.$$

Obwohl ohne Zurücklegen gezogen wird, sind die Stichproben mit höchstens 200 Teilen gegenüber 20 000 Teilen klein. Die Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich deshalb nur geringfügig; die Binomialverteilung ist eine geeignete Näherung.

Aufgabe 212 · Diabetes in einer Gruppe

Gesucht ist $1 - 0,928^n \geq 0,9$. Daraus folgt

$$n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,928} \approx 30,815.$$

Die Gruppe muss mindestens 31 Personen umfassen.

Aufgabe 213 · Besondere Geschenke

$$1 - (1 - p)^{20} \geq 0,9$$

liefert

$$p \geq 1 - 0,1^{1/20} \approx 0,10875.$$

Der Anteil muss also mindestens etwa 10,88 % betragen.

Aufgabe 214 · Maximale Standardabweichung

Für festes n ist $\sigma(p) = \sqrt{np(1-p)}$. Der Ausdruck $p(1-p) = 1/4 - (p - 1/2)^2$ wird bei

$$p = \frac{1}{2}$$

maximal. Dann ist $\sigma_{\max} = \sqrt{n}/2$.

Aufgabe 215 · Überbuchung einer Schule

Sei X die Zahl der tatsächlich erscheinenden Schülerinnen und Schüler. Dann $X \sim B(n, 0,85)$, und bei 95 Zusagen ist

$$P(X > 80) = P(X \geq 81) \approx 0,54195.$$

Gesucht ist das größte n mit $P(X \geq 81) < 0,05$. Für $n = 88$ beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa **0,03684**, für $n = 89$ bereits **0,06844**. Der Schulleiter sollte daher höchstens 88 Anmeldungen annehmen.

Aufgabe 216 · Auswahl eines Histogramms

Für $X \sim B(10, 0,3)$ liegt der Erwartungswert bei 3; die Verteilung ist rechtsschief und besitzt ihr Maximum bei 3. Dies zeigt die erste Abbildung. Weiter

$$P(4 < X < 7) = P(X = 5) + P(X = 6) \approx 0,13968,$$

$$P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) \approx 0,89708.$$

[Hauptseite](#)

Aufgabe 217 · Nicht ideale Münze

$$P(E) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2.$$

Bei F sind die ersten beiden Würfe bereits Wappen; unter den letzten drei Würfeln muss genau einmal Wappen fallen:

$$P(F) = \binom{3}{1} p^3 (1-p)^2.$$

Aus $p^3 = 0,216$ folgt $p = 0,6$. Wappen ist daher wahrscheinlicher als Zahl.

Aufgabe 218 · Polizeikontrolle

Für $X \sim B(n, 0,15)$ wird das kleinste n mit $P(X \geq 3) \geq 0,9$ gesucht. Es ist

$$n = 34, \text{quad} P(X \geq 3) \approx 0,90253.$$

Aufgabe 219 · Gewinnlose

Im Binomialmodell mit $p = G/2000$ ergibt die Forderung

$$1 - (1-p)^{10} \geq 0,95$$

den Wert $p \geq 1 - 0,05^{1/10} \approx 0,258866$. Danach wären mindestens 518 Gewinnlose erforderlich.

Beim tatsächlichen Ziehen von zehn verschiedenen Losen ohne Zurücklegen lautet die exakte Gegenwahrscheinlichkeit

$$P(\text{kein Gewinn}) = \frac{\binom{2000-G}{10}}{\binom{2000}{10}}.$$

Die kleinste ganze Zahl mit $1 - P(\text{kein Gewinn}) \geq 0,95$ ist $G = 517$; dann beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit etwa **0,95015**.

Aufgabe 220 · Braune und weiße Eier

Mit $X \sim B(10, 0,6)$ bedeutet „von jeder Farbe mindestens drei“ die Bedingung $3 \leq X \leq 7$. Somit

$$P(3 \leq X \leq 7) = \sum_{k=3}^7 \binom{10}{k} 0,6^k 0,4^{10-k} \approx 0,82042.$$

3.5 LF Signifikanztests

Aufgabe 221 · Wundermittel

Es gilt $H_0 : p \geq 0,40$ gegen $H_1 : p < 0,40$; verworfen wird H_0 bei $X \leq 7$. Die maximale Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art liegt am Rand $p = 0,40$:

$$\alpha = P_{0,4}(X \leq 7) = \sum_{k=0}^7 \binom{25}{k} 0,4^k 0,6^{25-k} \approx 0,15355.$$

Das entspricht etwa 15,36 %.

Aufgabe 222 · Fünfprozenthürde

[Hauptseite](#)

Für $H_0 : p \geq 0,05$ gegen $H_1 : p < 0,05$ und $X \sim B(2000, p)$ wird ein linksseitiger Ablehnungsbereich gesucht. Am Rand $p = 0,05$ gilt

$$P(X \leq 77) \approx 0,00858 \leq 0,01,$$

während $P(X \leq 78) \approx 0,01153 > 0,01$. Daher lautet die Entscheidungsregel:

$$X \leq 77 : H_0 \text{ verwerfen}; \quad X \geq 78 : H_0 \text{ nicht verwerfen.}$$

Aufgabe 223 · Torwand

a. Gesucht ist $1 - 0,6^n > 0,95$. Das kleinste passende n ist 6.

b. Genau ein Treffer entsteht entweder unten oder oben:

$$\binom{3}{1} 0,4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,9^3 + 0,6^3 \binom{3}{1} 0,1 \cdot 0,9^2 \approx 0,36742.$$

Aufgabe 224 · Werbeagentur

Getestet wird $H_0 : p \leq 0,7$ gegen $H_1 : p > 0,7$. Am Rand $p = 0,7$ gilt

$$P(X \geq 152) \approx 0,03595 \leq 0,05,$$

aber $P(X \geq 151) \approx 0,05059 > 0,05$. Somit wird H_0 bei mindestens 152 bekannten Personen verworfen; bei höchstens 151 wird sie nicht verworfen. Die tatsächliche maximale Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art beträgt etwa 3,59 %.

Diese Wahl schützt den Hersteller davor, eine bloße Behauptung der Agentur vorschnell als Erfolg anzuerkennen: Beahlt wird erst, wenn die Daten überzeugende Evidenz für $p > 0,7$ liefern.

Aufgabe 225 · Linksseitiger Test

Aus der Tabelle folgt

$$P_{0,4}(X \leq 31) = 0,0398478 \leq 0,05,$$

aber $P_{0,4}(X \leq 32) = 0,0615039 > 0,05$. Der Ablehnungsbereich ist daher

$$A = \{0, 1, \dots, 31\}.$$

Bei $X \leq 31$ wird H_0 verworfen, bei $X \geq 32$ nicht.

Aufgabe 226 · Rechtsseitiger Test

Die Tabelle enthält kumulierte Wahrscheinlichkeiten. Es gilt

$$P_{0,7}(X \geq 152) = 1 - P_{0,7}(X \leq 151) = 1 - 0,964052 = 0,035948,$$

während $P(X \geq 151) = 1 - 0,949408 = 0,050592 > 0,05$. Somit

$$A = \{152, 153, \dots, 200\}.$$

Bei $X \geq 152$ wird H_0 verworfen, sonst nicht.

3.6 LF Stetige Verteilungsfunktionen

[Hauptseite](#)

Aufgabe 227 · Standardisierung

a. Für $X \sim N(4, 2^2)$ ist

$$P(X < 3) = \Phi\left(\frac{3-4}{2}\right) = \Phi(-0,5) \approx 0,30854.$$

b. Für $X \sim N(2, 0,5^2)$ gilt

$$P(1,5 < X < 2,5) = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0,68269.$$

Aufgabe 228 · Geburtsgewicht

Für $X \sim N(3300, 800^2)$ erhält man

$$P(X < 2200) = \Phi(-1,375) \approx 0,08457,$$

$$P(X > 4000) = 1 - \Phi(0,875) \approx 0,19079.$$

Eine Abweichung um mehr als 300 g entspricht $|Z| > 0,375$:

$$P(|X - 3300| > 300) = 2(1 - \Phi(0,375)) \approx 0,70766.$$

Aufgabe 229 · Normalverteilung mit gegebener Varianz

Aus $\sigma^2 = 1/4$ folgt $\sigma = 1/2$. Damit

$$P(2,5 < X \leq 4) = \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0,81859.$$

Weiter ist

$$P(X - \mu > -3\sigma) = P(Z > -3) = \Phi(3) \approx 0,99865.$$

3.7 ST Konfidenzintervalle

Aufgabe 230 · Wald-Intervall

Die relative Häufigkeit ist $\hat{p} = 40/1000 = 0,04$. Das approximative 95-Prozent-Wald-Intervall lautet

$$\hat{p} \pm 1,96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,04 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,04 \cdot 0,96}{1000}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$[0,027854; 0,052146],$$

also näherungsweise ein Anteil zwischen 2,79 % und 5,21 %.

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

4.1 BF/ST Matrizen

Aufgabe 231 · Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \\ 24 & 24 & 24 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 12 & 15 & 18 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Damit ist an diesem Beispiel $AB \neq BA$.

Aufgabe 232 · Potenzen einer Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$A^2 = 2A, \quad A^3 = 4A, \quad A^4 = 8A.$$

Durch Induktion folgt für $n \geq 1$

$$A^n = 2^{n-1}A.$$

Aufgabe 233 · Matrixgleichungen

a. Aus $XA - A = 2X$ folgt

$$X(A - 2E) = A.$$

Da $A - 2E$ laut Voraussetzung invertierbar ist,

$$X = A(A - 2E)^{-1}.$$

b. Multiplikation von $A^{-1}XA - A^{-1}B = A^{-1}$ mit A von links ergibt $XA - B = E$. Daher

$$X = (B + E)A^{-1}.$$

Aufgabe 234 · Inverse Matrix

Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren erhält man

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Kontrolle liefert $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Aufgabe 235 · Lineare Matrixgleichung

Mit $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$ ist

$$X = \frac{1}{3}(C - E + 2A) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 236 · Transponieren einer Summe

[Hauptseite](#)

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}, \text{quad}(A + B)^T = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Andererseits

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 237 · Zweistufiger Produktionsprozess

Mit eingesetzten Gütern in den Zeilen und erzeugten Gütern in den Spalten lauten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{quad} B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{z} = (10, 5)^T$ werden

$$A\vec{z} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Mengeinheiten der Rohstoffe benötigt. Der Rohstoffbedarf je Endprodukt ist

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 238 · Produktion und Kosten

a. Die drei Zeilen von A stehen für drei verschiedene Rohstoffe.

b. Für $\vec{e} = (105, 80)^T$ gilt

$$\vec{z} = B\vec{e} = \begin{pmatrix} 1900 \\ 3090 \end{pmatrix}, \text{quad} \vec{r} = A\vec{z} = \begin{pmatrix} 13780 \\ 7600 \\ 16160 \end{pmatrix}.$$

c. Das System

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 18 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 84 \end{pmatrix}$$

hat die Lösung $e_1 = 3, e_2 = 2$.

d. Für $\vec{e} = (20, 30)^T$ erhält man

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 480 \\ 810 \end{pmatrix}, \text{quad} \vec{r} = \begin{pmatrix} 3540 \\ 1920 \\ 4200 \end{pmatrix}.$$

Die Kosten auf den drei Stufen betragen

$$\vec{k}_R \vec{r} = 7020, \text{quad} \vec{k}_Z \vec{z} = 2130, \text{quad} \vec{k}_E \vec{e} = 140.$$

Die gesamten variablen Kosten sind somit 9290 Geldeinheiten.

Aufgabe 239 · Übergangsmatrix für Firmenfahrzeuge

Bei Zustandsvektoren als Spalten ist

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}.$$

[△ Hauptseite](#)

Typ C ist absorbierend. Der normierte Fixvektor und die Grenzmatrix sind

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{quad} G = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 240 · Populationsmodell

In der Reihenfolge Eier, Jungtiere, Weibchen lautet die Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Übergangsdiagramm ist ein Zyklus: Von den Weibchen führen 50 Eier je Weibchen zum Zustand Eier, von dort führt die Rate 0,05 zu den Jungtieren und von dort die Rate 0,20 zurück zu den Weibchen.

Für $\vec{x}_0 = (2000, 500, 20)^T$ gilt

$$\vec{x}_1 = U\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \text{quad} \vec{x}_2 = U\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Da $U^3 = 0,5E$, halbiert sich jeder Zustandsbestand innerhalb von drei Jahren; langfristig stirbt die Population im Modell aus. Bei einer Jungtier-Überlebensrate q ist der Dreijahresfaktor $50 \cdot 0,05 \cdot q = 2,5q$. Für langfristiges Nichtaussterben muss

$$q \geq 0,4 = 40\%$$

gelten.

Aufgabe 241 · Dreistufiger Produktionsprozess

Die drei Verbrauchsmatrizen sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{quad} B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{quad} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{e} = (20, 30)^T$ folgt stufenweise

$$\vec{h} = C\vec{e} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \text{quad} \vec{z} = B\vec{h} = \begin{pmatrix} 200 \\ 310 \end{pmatrix}, \quad \text{quad} \vec{r} = A\vec{z} = \begin{pmatrix} 400 \\ 1130 \end{pmatrix}.$$

Benötigt werden 400 ME von R_1 und 1130 ME von R_2 .

Aufgabe 242 · Drehung um 58 Grad

Die Drehmatrix lautet

$$D = \begin{pmatrix} \cos 58^\circ & -\sin 58^\circ \\ \sin 58^\circ & \cos 58^\circ \end{pmatrix}.$$

Damit

$$A' = D \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos 58^\circ - 3 \sin 58^\circ \\ 2 \sin 58^\circ + 3 \cos 58^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,484 \\ 3,286 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 243 · Drehung eines Dreiecks

[Hauptseite](#)

Mit $D_{100} = \begin{pmatrix} \cos 100^\circ & -\sin 100^\circ \\ \sin 100^\circ & \cos 100^\circ \end{pmatrix}$ erhält man näherungsweise

$$A' = (-2,143|0,638), \quad B' = (-2,664|3,592), \quad C' = (-6,430|1,913).$$

4.2 ST Determinanten

Aufgabe 244 · Dreiecksmatrix

Da A eine obere Dreiecksmatrix ist,

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Aufgabe 245 · Determinante einer 3×3 -Matrix

Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt

$$\det A = 1(9 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + 3(7 \cdot 0 - 1 \cdot 3) - 2(7 \cdot 1 - 9 \cdot 3) = 30.$$

Aufgabe 246 · Laplace-Entwicklung

Die zweite Zeile besitzt zwei Nullen. Entwicklung nach dieser Zeile und Berechnung der beiden 3×3 -Determinanten liefert

$$\det A = 102.$$

Aufgabe 247 · Determinante einer Spiegelungsmatrix

$$\det A(\varphi) = -\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = -1.$$

Wegen der Multiplikativität der Determinante folgt

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = 1.$$

Tatsächlich ist $A(\varphi)^2 = E$.

4.3 BF/LF Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 248 · Widersprüchliches Gleichungssystem

Die linke Seite der dritten Gleichung ist das -2 -Fache der linken Seite der ersten Gleichung. Rechts müsste dann -12 stehen; angegeben ist jedoch -6 . Das System ist widersprüchlich und besitzt keine Lösung.

Aufgabe 249 · Anzahl von Gleichungen und Unbekannten

- Bei $m < n$ ist der Rang höchstens $m < n$. Ist das System lösbar, bleiben freie Variablen; genau eine Lösung ist nicht möglich.
- Ja. Bei $m > n$ können Gleichungen redundant sein. Ist das System konsistent und der Rang kleiner als n , besitzt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 250 · Parameterabhängiges Gleichungssystem

[Hauptseite](#)

Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung liefert $x_2 + 2x_3 = 1$. Subtraktion der ersten von der dritten ergibt

$$(a^2 - 4)x_3 = a - 2.$$

Für $a \neq \pm 2$ gibt es genau eine Lösung:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{a+5}{a+2}, \frac{a}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right).$$

Für $a = 2$ gibt es unendlich viele Lösungen

$$L = \{(1 + 3t, 1 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Für $a = -2$ haben die erste und dritte Gleichung dieselbe linke Seite, aber verschiedene rechte Seiten; es gibt keine Lösung.

Aufgabe 251 · Allgemeines 2×2 -System

Das System ist genau dann nicht lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Matrix verschiedene Ränge besitzen:

$$\text{rang}(A) < \text{rang}(A|b).$$

Anschaulich sind dann die Koeffizientenzeilen proportional, die rechten Seiten aber nicht im selben Verhältnis. Insbesondere gilt $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, ohne dass dieselbe lineare Abhängigkeit für (b_1, b_2) gilt.

Aufgabe 252 · Gemeinsamer Orthogonalvektor

Die Bedingungen $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ ergeben

$$\lambda + 2\mu + 12 = 0, \quad 2\lambda + \mu + 12 = 0.$$

Die Lösung ist $\lambda = \mu = -4$ und damit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4.4 ST Eigenwertprobleme

Aufgabe 253 · Eigenwerte und Eigenvektoren

Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\det(A - \lambda E) = (3 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ gehören alle von null verschiedenen Vielfachen von $(1, 0)^T$. Zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ gehören alle von null verschiedenen Vielfachen von $(1, -2)^T$. Direktes Einsetzen ergibt

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 254 · Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix

Für $c = \cos \varphi$ und $s = \sin \varphi$ gilt

$$\det(S - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} c - \lambda & s \\ s & -c - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - c^2 - s^2$$

[Hauptseite](#)

Die Eigenwerte sind daher $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

5 ST Komplexe Zahlen

[Hauptseite](#)

5.1 ST Rechnen mit komplexen Zahlen

Aufgabe 255 · Wurzel einer negativen Zahl

Mit der üblichen Hauptwurzel $\sqrt{-4} = 2i$ gilt

$$4 - \sqrt{-4} = 4 - 2i.$$

Aufgabe 256 · Differenz und Produkt

Für $z_1 = 4 - 5i$ und $z_2 = 2 + 11i$ ist

$$z_1 - z_2 = 2 - 16i,$$

$$z_1 z_2 = (4 - 5i)(2 + 11i) = 63 + 34i.$$

In der Gaußschen Zahlenebene wird bei der Subtraktion zum Vektor von z_1 der Gegenvektor $-z_2 = (-2, -11)$ addiert. Das Ergebnis ist der Punkt $(2, -16)$.

Aufgabe 257 · Zahlen in trigonometrischer Form

Es gilt

$$z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \text{ und } z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

Daher

$$z_1 + z_2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \right) + i \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right),$$

$$z_1 - z_2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \right) + i \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right).$$

Aufgabe 258 · Vierte Wurzeln von i

Da $i = e^{i(\pi/2 + 2\pi m)}$, lauten die vier Lösungen

$$z_k = e^{i(\pi/8 + k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Sie liegen auf dem Einheitskreis bei den Winkeln $\pi/8, 5\pi/8, 9\pi/8$ und $13\pi/8$.

Aufgabe 259 · Produkte und Potenzen

$$2e^{i\pi/4} \cdot 3e^{i\pi/2} = 6e^{3i\pi/4} = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i.$$

Mit dem Satz von de Moivre folgt

$$\left(2e^{i\pi/2} \right)^{100} = 2^{100} e^{i50\pi} = 2^{100}.$$

Aufgabe 260 · Nullstellen eines komplexen Polynoms

[Hauptseite](#)

Einsetzen zeigt $p(-1) = 0$. Die Faktorisierung lautet

$$p(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 13).$$

Damit sind die Nullstellen

$$z_1 = -1, \text{ und } z_{2,3} = 2 \pm 3i.$$

Aufgabe 261 · Gleichung mit der konjugierten Zahl

Für $z = x + iy$ gilt $-i\bar{z} = -y - ix$. Aus $z = -i\bar{z}$ folgt $y = -x$. Somit

$$L = \{x(1 - i) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Geometrisch ist dies die Gerade durch den Ursprung mit Steigung -1 .

Aufgabe 262 · Real- und Imaginärteil

$$z = \frac{1+i}{3+i} = \frac{(1+i)(3-i)}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Also $\operatorname{Re}(z) = 2/5$ und $\operatorname{Im}(z) = 1/5$.

5.2 ST Anwendungen

Aufgabe 263 · Überlagerung dreier Schwingungen

Wir verwenden die Darstellung $u(t) = \operatorname{Im}(Ce^{it})$. Die drei Phasoren ergeben

$$C = 100 + 200e^{5i\pi/6} + 150e^{i\pi/2} = 100(1 - \sqrt{3}) + 250i.$$

Die komplexe Form der resultierenden Schwingung ist daher

$$u_C(t) = (100(1 - \sqrt{3}) + 250i)e^{it},$$

wobei die reelle Schwingung als Imaginärteil gelesen wird. Direkt ausmultipliziert:

$$u(t) = 100(1 - \sqrt{3}) \sin t + 250 \cos t.$$

In Amplituden-Phasen-Form ist

$$u(t) = R \sin(t + \varphi),$$

$$R = \sqrt{102500 - 20000\sqrt{3}} \approx 260,50, \text{ und } \varphi \approx 1,85565 \text{ rad} \approx 106,32^\circ.$$

Aufgabe 264 · Vorgegebene resultierende Schwingung

Aus den Additionstheoremen folgt

$$y(t) = \frac{A_1 + A_2}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} (-A_1 + A_2) \sin t.$$

Für $y(t) = \cos t$ müssen $A_1 = A_2$ und $(A_1 + A_2)/2 = 1$ gelten. Daher

$$A_1 = A_2 = 1.$$

[△ Hauptseite](#)

Aufgabe 265 · Komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren

Für $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ist

$$\det(A - \lambda E) = (-1 - \lambda)^2 + 4.$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -1 + 2i, \text{quad} \lambda_2 = -1 - 2i.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind beispielsweise

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}, \text{quad} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Direktes Multiplizieren bestätigt $A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$.

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

6 ST Funktionen von mehreren Variablen Hauptseite

6.1 ST Partielles Ableiten

Aufgabe 266 · Partielle Ableitungen einer Exponentialfunktion

Gegeben ist

$$f(x, y) = x + e^{y/x}, \quad x \neq 0.$$

Für die Ableitung nach x wird y als konstant behandelt. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}$$

folgt

$$f_x(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2} e^{y/x}.$$

Bei der Ableitung nach y ist x konstant. Damit ist

$$f_y(x, y) = \frac{1}{x} e^{y/x}.$$

Nochmaliges partielles Ableiten liefert

$$f_{xx}(x, y) = \left(\frac{2y}{x^3} + \frac{y^2}{x^4} \right) e^{y/x} = \frac{y(2x + y)}{x^4} e^{y/x},$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{1}{x^2} e^{y/x},$$

$$f_{xy}(x, y) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{y}{x^3} \right) e^{y/x} = -\frac{x + y}{x^3} e^{y/x}.$$

Die Funktion ist auf jedem der Gebiete $x < 0$ und $x > 0$ beliebig oft stetig differenzierbar. Daher stimmen die gemischten Ableitungen überein:

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y) = -\frac{x + y}{x^3} e^{y/x}.$$

Schließlich ergibt sich

$$f_{yyx}(x, y) = -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{y}{x^4} \right) e^{y/x} = -\frac{2x + y}{x^4} e^{y/x}.$$

Aufgabe 267 · Partielle Ableitungen einer Funktion mit drei Variablen

Gegeben ist

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 + y \sin z.$$

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung lauten

$$f_x = 2xy^2, \quad f_y = 2x^2 y + \sin z, \quad f_z = y \cos z.$$

Für die verlangten gemischten Ableitungen folgt

$$f_{xy} = 4xy, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yz} = \cos z,$$

und damit

[Hauptseite](#)

$$f_{xyz} = 0.$$

6.2 ST Lokale Maxima und Minima

Aufgabe 268 · Lokale Extrema

Für

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2y^3 - 6y - 12$$

lauten die partiellen Ableitungen

$$f_x = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2), \quad f_y = 6y^2 - 6 = 6(y - 1)(y + 1).$$

Aus $f_x = 0$ und $f_y = 0$ ergeben sich die vier stationären Stellen

$$(0, 1), \quad (0, -1), \quad (-2, 1), \quad (-2, -1).$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$f_{xx} = 6x + 6, \quad f_{yy} = 12y, \quad f_{xy} = 0.$$

Für die Determinante der Hesse-Matrix gilt daher

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 72y(x + 1).$$

Die Auswertung an den stationären Stellen ergibt:

Stelle	f_{xx}	D	Funktionswert	Einordnung
$(0, 1)$	6	72	-16	lokales Minimum
$(0, -1)$	6	-72	-8	Sattelpunkt
$(-2, 1)$	-6	-72	-12	Sattelpunkt
$(-2, -1)$	-6	72	-4	lokales Maximum

Somit besitzt die Funktion das lokale Minimum

$$T_{\min} = (0, 1, -16)$$

und das lokale Maximum

$$T_{\max} = (-2, -1, -4).$$

Die beiden übrigen stationären Punkte $(0, -1, -8)$ und $(-2, 1, -12)$ sind Sattelpunkte. Wegen der kubischen Terme ist die Funktion nach oben und unten unbeschränkt; globale Extrema gibt es daher nicht.

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

7 ST Differentialgleichungen

[△ Hauptseite](#)

7.1 ST Grundbegriffe

Aufgabe 269 · Probe durch Einsetzen

Gegeben ist

$$y(x) = \cos(kx) + \sin(kx).$$

Zweimaliges Ableiten ergibt

$$y'(x) = -k \sin(kx) + k \cos(kx),$$

$$y''(x) = -k^2 \cos(kx) - k^2 \sin(kx) = -k^2 y(x).$$

Damit erfüllt die Funktion die Differentialgleichung $y'' = -k^2 y$.

Aufgabe 270 · Reproduktion in der zweiten Ableitung

Sowohl Sinus als auch Kosinus wechseln bei zweimaligem Ableiten ihr Vorzeichen:

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos x = -\cos x, \quad \frac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x.$$

Die allgemeine Lösung von $y'' = -y$ lautet daher

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 271 · Reproduktion in der ersten Ableitung

Die Exponentialfunktion reproduziert sich beim Ableiten. Deshalb besitzt $y' = y$ die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

7.2 ST Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 272 · Differentialgleichung erster Ordnung

Für $x \neq 0$ wird

$$xy' - y^2 - 1 = 0$$

durch Trennung der Variablen gelöst:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integration liefert

$$\arctan y = \ln |x| + C.$$

Somit ist

$$y(x) = \tan(\ln|x| + C).$$

[Hauptseite](#)

Die Lösung gilt jeweils auf einem Intervall, das weder $x = 0$ noch eine Polstelle der Tangensfunktion enthält.

Aufgabe 273 · Anfangswertproblem erster Ordnung

Aus

$$xy' - y(x+1) = 0$$

folgt auf dem durch $x = 1$ bestimmten Gebiet $x > 0$

$$\frac{y'}{y} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Nach der Integration gilt

$$\ln|y| = x + \ln x + C$$

und damit

$$y = Cxe^x.$$

Die Anfangsbedingung $y(1) = 2$ ergibt $Ce = 2$. Die gesuchte Lösung ist also

$$y(x) = 2xe^{x-1}, \quad x > 0.$$

Aufgabe 274 · Homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

Zur Gleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

gehört das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Aus den Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$ folgt

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Aufgabe 275 · Homogene lineare Differentialgleichung fünfter Ordnung

Das charakteristische Polynom der Gleichung

$$y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$$

faktoriert zu

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4)^2.$$

Neben der einfachen Nullstelle 0 treten die komplexen Nullstellen $2i$ und $-2i$ jeweils doppelt auf. Daher lautet die reelle allgemeine Lösung

$$y(x) = C_0 + (C_1 + C_2x) \cos(2x) + (C_3 + C_4x) \sin(2x).$$

Aufgabe 276 · Inhomogene Gleichung mit polynomialer und exponentieller Störung

Für

$$y'' + 3y' + 2y = x + e^{2x}$$

[Hauptseite](#)

ist die homogene Lösung

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Für den polynomialen Anteil setzen wir $y_{p,1} = ax + b$. Einsetzen ergibt

$$2ax + 3a + 2b = x,$$

also $a = 1/2$ und $b = -3/4$. Für den exponentiellen Anteil liefert der Ansatz $y_{p,2} = Ae^{2x}$ die Gleichung $12A = 1$. Insgesamt folgt

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{12} e^{2x}.$$

Aufgabe 277 · Inhomogene Gleichung im Resonanzfall

Gegeben ist

$$y'' + 4y' + 13y = e^{-2x} \sin(3x).$$

Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung besitzt die Nullstellen $-2 \pm 3i$. Daher ist

$$y_h = e^{-2x} (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)).$$

Mit der Substitution $y = e^{-2x}v$ vereinfacht sich die linke Seite zu

$$y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}(v'' + 9v).$$

Somit ist $v'' + 9v = \sin(3x)$. Wegen der Resonanz kann

$$v_p = -\frac{x}{6} \cos(3x)$$

gewählt werden. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = e^{-2x} \left(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) - \frac{x}{6} \cos(3x) \right).$$

Aufgabe 278 · Variation der Konstanten

Für $x \neq 0$ wird die Gleichung

$$x^2 y' + y = x^3 e^{1/x}$$

zunächst durch x^2 dividiert:

$$y' + \frac{1}{x^2} y = x e^{1/x}.$$

Ein integrierender Faktor ist

$$\mu(x) = e^{\int x^{-2} dx} = e^{-1/x}.$$

Damit gilt

$$(e^{-1/x} y)' = x.$$

Nach der Integration erhält man

$$e^{-1/x} y = \frac{x^2}{2} + C$$

und somit auf jedem Intervall, das **0** nicht enthält,

[Hauptseite](#)

$$y(x) = e^{1/x} \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

Aufgabe 279 · Inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(x) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix **A** besitzt den Eigenwert **2** mit Eigenvektor $(1, 1, 1)^T$ und den doppelten Eigenwert **-1**. Als Basis des zugehörigen Eigenraums können $(1, -1, 0)^T$ und $(1, 0, -1)^T$ verwendet werden. Damit ist

$$y_h = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für eine partikuläre Lösung setzen wir $y_p = e^x v$. Aus

$$v = Av + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Systems lautet daher

$$y(x) = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 280 · Homogenes lineares Differentialgleichungssystem

Für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

lautet das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2 + 4.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung ist

$$y(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Komponentenweise bedeutet dies

$$y_1 = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)),$$

$$y_2 = e^{-x} (-C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)).$$

Aufgabe 281 · Schwingungsdifferentialgleichung

[Hauptseite](#)

a) Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz und dem Federgesetz folgt

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Mit $m = 0,5$ und $k = 8$ ergibt sich

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \iff x''(t) + 16x(t) = 0.$$

b) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 16$ besitzt die Nullstellen $\lambda = \pm 4i$. Daher ist

$$x(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t).$$

Aus $x(0) = 0,10$ folgt $C_1 = 0,10$, aus $x'(0) = 0$ folgt $C_2 = 0$. Somit

$$x(t) = 0,10 \cos(4t) \text{ m.}$$

Die Kreisfrequenz und die Periodendauer sind

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4 \text{ s}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \text{ s} \approx 1,571 \text{ s.}$$

c) Mit $v = x'$ lautet das System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -16x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit $h = 0,02$ stimmt auf $[0, 5]$ bis auf einen maximalen Auslenkungsfehler von ungefähr $6,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ mit der analytischen Lösung überein.

d) Mit Dämpfung gilt

$$mx'' + cx' + kx = 0 \iff x'' + 1,6x' + 16x = 0.$$

Da $c^2 - 4mk < 0$ ist, liegt der unterkritisch gedämpfte Fall vor. Die Lösung schwingt weiter, ihre Amplitude nimmt jedoch mit der Hüllkurve $e^{-ct/(2m)} = e^{-0,8t}$ ab. Die gedämpfte Kreisfrequenz beträgt

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{15,36} \approx 3,919 \text{ s}^{-1}.$$

 [Rechnung und Diagramme in Google Colab öffnen](#)

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

8.1 LF Newton-Verfahren

Aufgabe 282 · Nullstelle eines Polynoms

Gegeben ist

$$f(x) = 2,2x^3 - 7,854x^2 + 6,23x - 22,2411.$$

Die Ableitung lautet

$$f'(x) = 6,6x^2 - 15,708x + 6,23.$$

Das Newton-Verfahren verwendet die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Aus der Grafik bietet sich der Startwert $x_0 = 4$ an. Die Iteration ergibt:

n	x_n	$f(x_n)$
0	4,000000000	17,814900000
1	3,636415772	2,345920850
2	3,571939784	0,066533144
3	3,570001723	0,000059033
4	3,570000000	ungefähr 0

Damit ist die gesuchte reelle Lösung

$$x \approx 3,57.$$

Tatsächlich lässt sich das Polynom faktorisieren:

$$f(x) = (x - 3,57)(2,2x^2 + 6,23).$$

Da $2,2x^2 + 6,23 > 0$ für alle reellen x gilt, ist $x = 3,57$ die einzige reelle Nullstelle.

8.2 ST Polygonzugverfahren von Euler

Aufgabe 283 · Näherung für ein Anfangswertproblem

Gegeben sind

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad h = \frac{1}{4}.$$

Mit

$$F(x, y) = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

[△ Hauptseite](#)

lautet das Euler-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n).$$

Ausgehend von $(x_0, y_0) = (1/2, 0)$ sind bis $x = 1$ zwei Schritte erforderlich.

Im ersten Schritt gilt

$$F\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 1,$$

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad y_1 = 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Im zweiten Schritt ist

$$F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}.$$

Damit folgt

$$x_2 = 1,$$

$$y_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{9} = \frac{11}{18} \approx 0,6111.$$

Die gesuchte Euler-Näherung lautet somit

$$y(1) \approx 0,6111.$$

Dieses Kapitel folgt vollständig der Reihenfolge der Aufgaben in der KDP-Arbeitsfassung. Ergebnisse stehen ohne Rahmen und werden beim Word-Export als bearbeitbare Formeln gesetzt.

9.1 ST Lineare Optimierung

Aufgabe 284 · Simplex- und graphische Lösung

Zu maximieren ist

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$2x_1 \leq 14, \quad \frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq \frac{16}{3}, \quad x_2 \leq 4, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Die Eckpunkte des zulässigen Polygons sind

$$O = (0, 0), \quad A = (7, 0), \quad B = \left(\frac{4}{3}, 4\right), \quad C = (0, 4).$$

Die Zielfunktion an diesen Punkten lautet

$$f(O) = 0, \quad f(A) = 7, \quad f(B) = \frac{52}{3}, \quad f(C) = 16.$$

Damit liefert der Simplex-Algorithmus als optimale Basislösung

$$x^* = \left(\frac{4}{3}, 4\right), \quad f(x^*) = \frac{52}{3} \approx 17,33.$$

Graphisch ist der zulässige Bereich durch die drei Geraden und die positiven Koordinatenachsen begrenzt. Die Isolinien

$x_1 + 4x_2 = c$ werden parallel in Richtung wachsender Werte verschoben. Die letzte noch zulässige Isolinie berührt den Bereich im Eckpunkt B .

Aufgabe 285 · Zweites lineares Optimierungsproblem

Gegeben sind

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

mit

$$x_1 + x_2 \leq 4, \quad 3x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Die Eckpunkte des zulässigen Bereichs sind

$$O = (0, 0), \quad A = (2, 0), \quad B = (1, 3), \quad C = (0, 4).$$

Ihre Zielfunktionswerte sind

$$f(O) = 0, \quad f(A) = 4, \quad f(B) = 5, \quad f(C) = 4.$$

Folglich liegt das Maximum bei

$$x^* = \left(\frac{1}{3}, 3\right), \quad f(x^*) = 5.$$

Der Punkt B ist der Schnittpunkt der beiden bindenden Nebenbedingungen $x_1 + x_2 = 4$ und $3x_1 + x_2 = 6$. Die Isolinie aus der Abbildung ist für $f = 2$ die Gerade

[Hauptseite](#)

$$2x_1 + x_2 = 2.$$

Alle Punkte auf dieser Geraden besitzen denselben Zielfunktionswert 2 . Weitere Isolinien sind zu ihr parallel; beim Verschieben in Richtung größerer Werte wird der zulässige Bereich zuletzt bei B berührt.

9.2 ST Nichtlineare Optimierung

Aufgabe 286 · Kürzester Abstand zu einer Parabel

Gesucht ist der Punkt $D = (x, y)$ auf

$$g(x, y) = 2y - x^2 = 0,$$

der vom Punkt $P = (4, 1)$ den kleinsten Abstand hat. Wir minimieren zweckmäßig das Abstandsquadrat

$$F(x, y) = (x - 4)^2 + (y - 1)^2.$$

Die Lagrange-Funktion sei

$$L(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda(2y - x^2).$$

Die notwendigen Bedingungen lauten

$$2(x - 4) - 2\lambda x = 0,$$

$$2(y - 1) + 2\lambda = 0,$$

$$2y - x^2 = 0.$$

Aus der Nebenbedingung folgt $y = x^2/2$. Alternativ nach Einsetzen in das Abstandsquadrat erhält man

$$F(x) = (x - 4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2,$$

$$F'(x) = x^3 - 8.$$

Die einzige reelle stationäre Stelle ist $x = 2$, somit $y = 2$. Die Lagrange-Gleichungen liefern dazu $\lambda = -1$. Da $F(x) \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$, handelt es sich um das globale Minimum.

Der gesuchte Punkt und der minimale Abstand sind daher

$$D = (2, 2), \quad d_{\min} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}.$$

Anhang

Alpha	A, α	Beta	B, β	Gamma	Γ, γ	Delta	Δ, δ	Epsilon	Ε, ε
Zeta	Z, ζ	Eta	H, η	Theta	Θ, θ	Iota	I, ι	Kappa	K, κ
Lambda	Λ, λ	My	M, μ	Ny	N, ν	Xi	Ξ, ξ	Omikron	O, ο
Pi	Π, π	Rho	P, ρ	Sigma	Σ, σ	Tau	T, τ	Ypsilon	Υ, υ
Phi	Φ, φ	Chi	X, χ	Psi	Ψ, ψ	Omega	Ω, ω		

#### Algebra									
$\mathbb{N}$					Menge der natürlichen Zahlen				
$\mathbb{N}_0$					Menge der natürlichen Zahlen einschl. 0				
$\mathbb{Q}$					Menge der rationalen Zahlen				
$\mathbb{R}$					Menge der reellen Zahlen				
$\mathbb{R}_+$					Menge der nichtnegativen reellen Zahlen (hier einschließlich 0)				
$\mathcal{P}(M)$					Potenzmenge von M				
$\emptyset$					Leere Menge				
$\wedge$					Logisches UND				
$\vee$					Logisches ODER				
$\mapsto$					Zuordnung				
$\implies$					Logische Folgerung, wenn-dann, daraus folgt				
$\Leftrightarrow$					Ist äquivalent zu				
$:=$					Ist definiert als				
$a \propto b$					a ist proportional zu b				

#### Algebra	Hauptseite
$n!$	Fakultät: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$; <i>zusätzlich</i> $0! = 1$
$\in$	Ist Element von
$\subseteq$	Ist Teilmenge von
$\{x \dots\}$	Die Menge aller x, für die gilt ...
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall
(a, b)	Offenes Intervall
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Analysis	
Σ	Summenzeichen
Π	Produktzeichen
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$	A ist Grenzwert der Funktion $f(x)$, wenn x gegen a geht
a^n	a in der n-ten Potenz, $a \bullet a \bullet a \bullet \dots \bullet a$ (n mal)
$\sqrt{a}$	Quadratwurzel aus a, $a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[2]{a}$
$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel aus a, $a^{\frac{1}{n}}$
a^{-n}	$\frac{1}{a^n}$
ln	Logarithmus zur Basis e, natürlicher Logarithmus
lg	Logarithmus zur Basis 10, dekadischer Logarithmus
$\log_b(a)$	Allgemeiner Logarithmus von a zur Basis b
f	Eine Funktion f
$f(x)$	Funktionswert einer Funktion f an der Stelle x

##### Algebra	Hauptseite
$f(x) = f(-x)$	f ist gerade Funktion
$f(x) = -f(-x)$	f ist ungerade Funktion
$s : x \mapsto -x$	Spiegelung
$t_c : x \mapsto x + c$	Translation um die Konstante c
$s_c : x \mapsto c \cdot x$	Skalierung mit der Konstanten c
$f(g(x)), f \circ g$	Komposition von f und g
$f'(x), f''(x), f'''(x)$ oder y', y'', y'''	Erste, zweite, dritte Ableitung der Funktion $f(x)$
$F(x)$	Stammfunktion zu $f(x)$ mit $F'(x) = f(x)$
$\frac{\partial f}{\partial x}, f_x$	Partielle Ableitung von f nach x
$\frac{\partial f}{\partial y}, f_y$	Partielle Ableitung von f nach y
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), f_{xx}$	Zweite Partielle Ableitung von f nach x
$\int_a^b f(x) dx$	Bestimmtes Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b
$H_f(x)$	Hesse-Matrix : $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$
Lineare Algebra	
$ \vec{a} $	Betrag : $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt : $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

##### Algebra	Hauptseite
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt : $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$	Spatprodukt : $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
$\det A$	Determinante von A, z.B.: $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$
E	Einheitsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
A^{-1}	Inverse Matrix: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
A^T	Transponierte (gestürzte) Matrix: $(a_{\rho\mu}) = (a_{\mu\rho})$
$a \parallel b$	Parallelität
$a \perp b$	Orthogonalität
$\vec{\nabla} \phi = \text{grad } \Phi$ (Nabla-Operator $\vec{\nabla}$)	Gradient : $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$
$\vec{\nabla} \bullet \vec{F} = \text{div } \vec{F}$	Divergenz : $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F}$	Rotation : $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$
Stochastik	
$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	Bernoulli-Kette
$B(n; p; k)$	Binomialverteilung
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	Normalverteilung ($\sigma > 0$)
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	Kriterium für die Unabhängigkeit der Ereignisse A und B

##### Algebra	
	Hauptseite
$E(X)$	Kenngroße Erwartungswert von X: $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$
$VAR(X)$	Kenngroße Varianz von X: $VAR(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
$\sigma(X)$	$\sigma(X) = \sqrt{VAR(X)}$
$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$	Formel von Bayes ($P(A) > 0$; B_i bilden eine Zerlegung)
$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$	Standardisierte Zufallsvariable ($\sigma(X) > 0$)
Komplexe Zahlen	
$i \text{ mit } i^2 = -1$	Komplexe Einheit
$z = x + iy$	Arithmetische Form
$\bar{z} = x - iy$	Konjugiert Komplexe Zahl $\bar{z}$
$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$	Trigonometrische Form
$z = r e^{i\varphi}$	Exponentialform
$\operatorname{Re}(z) = x$	Realteil von z
$\operatorname{Im}(z) = y$	Imaginärteil von z
$ z = r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$	Betrag von z

Konstanten und Zahlenwerte

π	3,141592654...	$\ln(1)$	0
e	2,71828182...	$\ln(e)$	1
$\sqrt{2}$	1,4142136...	$\ln(2)$	0,6931472...

	3,141592654...		Hauptseite
$\sqrt{3}$	1,7320508...	a^0	1
Prozent	0,01	Promille	0,001
n (Nano)	10^{-9}	G (Giga)	10^9
μ \ (Mikro)	10^{-6}	M (Mega)	10^6
m (Milli)	10^{-3}	k (Kilo)	10^3
c (Zenti)	10^{-2}	h (Hekto)	10^2
d (Dezi)	10^{-1}	da (Deka)	10^1

Pascalsches Dreieck

										1											
									1		1										
								1		2		1									
							1		3		3		1								
						1		4		6		4		1							
					1		5		10		10		5		1						
				1		6		15		20		15		6		1					
			1		7		21		35		35		21		7		1				
		1		8		28		56		70		56		28		8		1			
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1		
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1	

5. 1. [W/BF] Permutation
- Eine Anordnung von n Elementen in einer bestimmten Reihenfolge.
- Alle n Kugeln sind voneinander verschieden:
- $P(n) = n!$
- Unter n Kugeln befinden sich jeweils $n_1, n_2, \dots, n_k$ gleiche Kugeln:

- $P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

[Hauptseite](#)

1. [W/BF] Kombination

Aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen werden k Elemente ausgewählt; die Reihenfolge wird nicht berücksichtigt.

Ziehen ohne Zurücklegen:

- $C(n; k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ziehen mit Zurücklegen:

- $C(n; k) = \binom{n+k-1}{k}$

1. [W/BF] Variation

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln entnommen und in der Reihenfolge der Ziehung angeordnet.

Ziehen der k Kugeln ohne Zurücklegen:

- $V(n; k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ziehen der k Kugeln mit Zurücklegen:

- $V(n; k) = n^k$

1.

- Sinus = $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

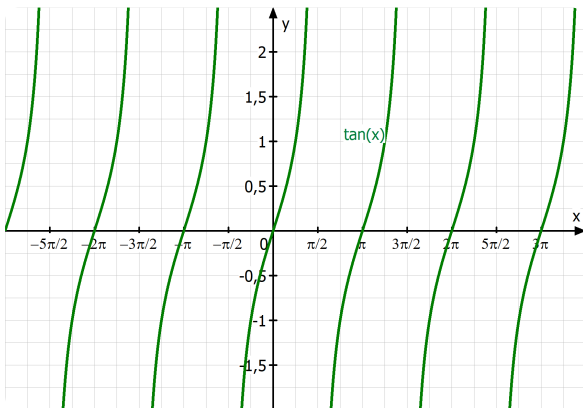
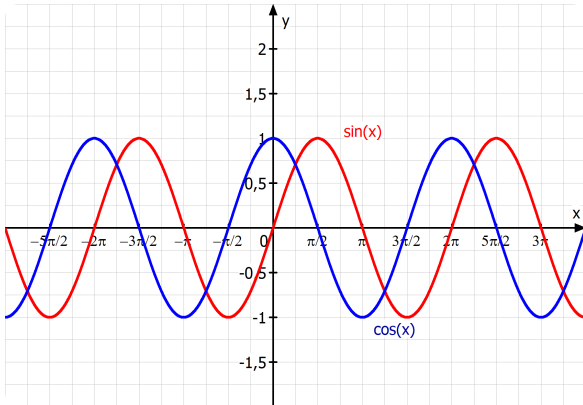
- Cosinus = $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

- Tangens = $\frac{\text{Sinus}}{\text{Cosinus}}$

- Sinus und Cosinus sind 2π -periodisch

- Bogenlänge $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	210°	270°	360°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-	0



Differentiationsregeln

- $(c)' = 0$ (c const)
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$
- Summenregel: $(f + g)' = f' + g'$
- Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$
- Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

1.

- $\int a \, dx = ax + C$
- $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \quad n \neq -1$

Verallgemeinerung: $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C, \quad a \neq 0, n \neq -1$

- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

Verallgemeinerung: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, a \neq 0$

[Hauptseite](#)

- $\int e^x dx = e^x + C$

Verallgemeinerung: $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0$

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Verallgemeinerung: $\int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C, a \neq 0$

- $\int \cos x dx = \sin x + C$

Verallgemeinerung: $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C, a \neq 0$

Integrationsregeln

- Faktorregel: $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$
- Summenregel: $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
- Partielle Integration: $\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$
- Substitution: $\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = \int f(u) du, u = g(x)$
- Spezielle Regeln:

$$\int f'(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot f(x)^2 + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Normalverteilung

- Für negative Argumente gilt: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	Hauptseite	8	0,09
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$\lambda = 0$	Einfache Nullstelle
$\lambda = 0$	Zweifache Nullstelle
$\lambda = 0$	k-fache Nullstelle
$\lambda = \alpha$	Einfache reelle Nullstelle
$\lambda = \alpha$	Zweifache reelle Nullstelle
$\lambda = \alpha$	k-fache reelle Nullstelle
$\lambda = i\beta$	Paar konjugierter rein imaginärer einfacher Nullstellen
$\lambda = -i\beta$	
$\lambda = i\beta$	Paar konjugierter rein imaginärer zweifacher Nullstellen
$\lambda = -i\beta$	
$\lambda = i\beta$	Paar konjugierter rein imaginärer k-facher Nullstellen
$\lambda = -i\beta$	
$\lambda = \alpha + i\beta$	Paar konjugierter komplexer einfacher Nullstellen
$\lambda = \alpha - i\beta$	
$\lambda = \alpha + i\beta$	Paar konjugierter komplexer zweifacher Nullstellen

Linear unabhängige Lösungen der DGL

1
 $1, x$
 $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$
 $e^{\alpha x}$
 $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$
 $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}$
 $\cos \beta x, \sin \beta x$
 $\cos \beta x, \sin \beta x, x \cos \beta x, x \sin \beta x$
 $\cos \beta x, \sin \beta x, x \cos \beta x, x \sin \beta x, \dots$
 $\dots, x^{k-1} \cos \beta x, \dots x^{k-1} \sin \beta x$
 $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
 $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x,$
 $xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x$
 $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x,$
 $xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots$
 $\dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms			Linear unabhängige Lös
	Einfache Nullstelle		Hauptseite
$\lambda = \alpha - i\beta$			
$\lambda = \alpha + i\beta$	Paar konjugierter komplexer k-facher Nullstellen		
$\lambda = \alpha - i\beta$			

S. P. Thompson: Höhere Mathematik – und doch verständlich, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1926

Lambacher, Schweizer: Algebra 2, Mathematisches Unterrichtswerk, Stuttgart, Klett Verlag, 1968

I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, Frankfurt a. M., Verlag Harri Deutsch 1987

H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Stuttgart, Teubner Verlag 1986

H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Stuttgart, Teubner Verlag 1980