

Karsten Keßler

Grundlagen der Integralrechnung

Stand: 22.09.2026

Grundlagen der Integralrechnung

1. Begriff des Integrals
2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
3. Zusammenhang von Ableitung und Integral
4. Wichtige Eigenschaften
5. Überblick der Verfahren
6. Übungsaufgaben
7. Übergang zum Doppelintegral

1. Begriff des Integrals

Das bestimmte Integral beschreibt die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x)$ und der x-Achse. Es kann als Grenzwert einer Riemann-Summe interpretiert werden:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(x_i) \, \Delta x$$

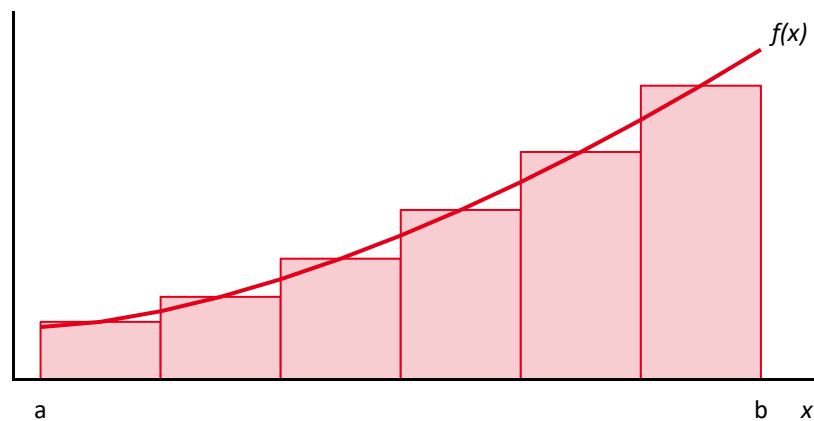


Abb. 1: Riemann-Summe als Näherung der Fläche unter $f(x)$

2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verknüpft Ableitung und Integral: Ist f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$

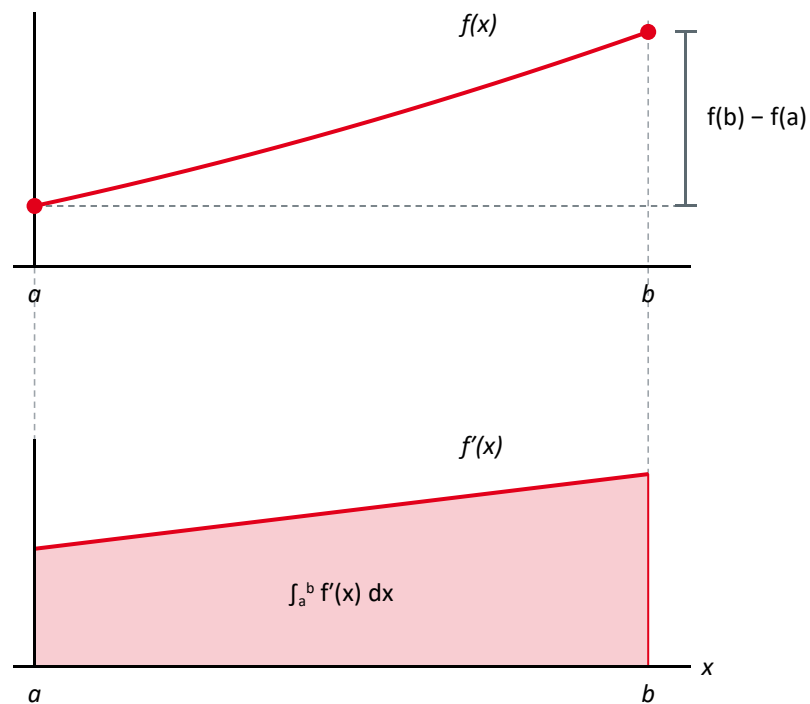


Abb. 2: Die getönte Fläche unter f' (unten) ist genau der Höhenunterschied von f zwischen a und b (oben)

3. Zusammenhang von Ableitung und Integral

Hält man die untere Grenze fest und lässt die obere Grenze wandern, so wird aus dem Integral eine Funktion, die Flächenfunktion

$$A(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

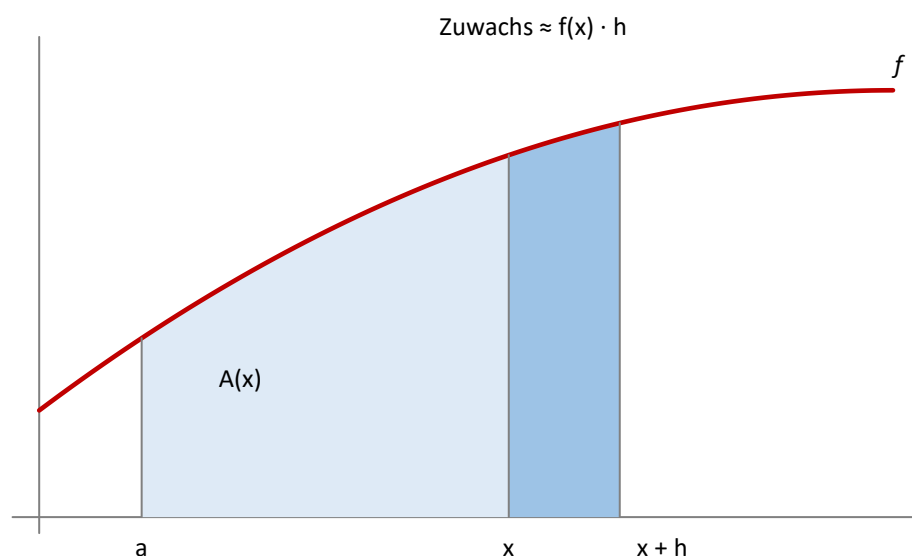


Abb. 3: Die Flächenfunktion $A(x)$ und ihr Zuwachs beim Schritt von x nach $x+h$

- 1 Zuwachs der Fläche: $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$
- 2 Division durch h : $[A(x+h) - A(x)] / h \approx f(x)$
- 3 Grenzübergang $h \rightarrow 0$: $A'(x) = f(x)$

Die Näherung in Schritt 1 gilt für sehr kleine h ; der Grenzübergang in Schritt 3 macht daraus eine exakte Gleichung, vorausgesetzt, f ist an der Stelle x stetig.

$$A'(x) = f(x)$$

Die Flächenfunktion ist damit eine Stammfunktion von f . Ableiten und Integrieren sind Umkehroperationen; genau diese Aussage nutzt der Hauptsatz aus Kapitel 2.

Begriff: Stammfunktion

Eine Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von f . Die Flächenfunktion A ist also eine Stammfunktion; jede weitere unterscheidet sich von ihr nur um eine additive Konstante: $F(x) = A(x) + C$.

3. Zusammenhang von Ableitung und Integral

Die Herleitung lässt sich an konkreten Funktionen nachrechnen: Flächenfunktion aufstellen, anschließend ableiten. Man landet stets wieder beim Integranden. Die Beispiele bestätigen den Zusammenhang, sie ersetzen die Herleitung auf der vorigen Seite nicht.

Beispiel 1: $f(x) = x^2$ mit $a = 0$

$$A(x) = \int_0^x t^2 dt = [t^3/3]_0^x = x^3/3$$

$$A'(x) = 3x^2/3 = x^2$$

$$A'(x) = f(x) \quad (\text{w.z.z.w.})$$

Beispiel 2: $f(x) = \sin x$ mit $a = 0$

$$A(x) = \int_0^x \sin t dt = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x$$

$$A'(x) = \sin x$$

$$A'(x) = f(x) \quad (\text{w.z.z.w.})$$

Zahlenprobe zu Beispiel 2

Für $x = \pi$ ergibt die Flächenfunktion $A(\pi) = 1 - \cos \pi = 2$. Die Riemann-Summe aus Aufgabe 6.4 nähert denselben Wert mit vier Teilintervallen auf 1,90 (Randsummen) bzw. 2,05 (Mittelpunktregel) an.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Links steht die Ableitung der Flächenfunktion, rechts die Auswertung über eine Stammfunktion F . Beide Formeln beschreiben denselben Zusammenhang aus zwei Richtungen.

4. Wichtige Eigenschaften

Für integrierbare Funktionen f, g auf $[a, b]$ und Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechenregeln.

Linearität:

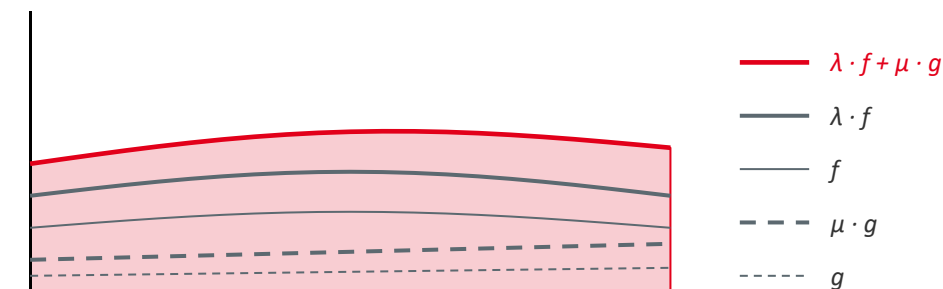
$$\int (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)) \, dx = \lambda \cdot \int f(x) \, dx + \mu \cdot \int g(x) \, dx$$

Additivität:

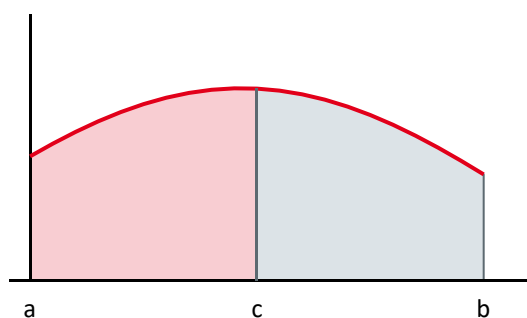
$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

Monotonie:

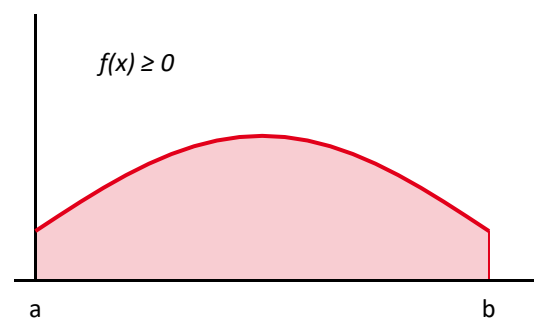
$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$$



Linearität: Fläche unter $\lambda \cdot f + \mu \cdot g = \lambda \cdot \text{Fläche}(f) + \mu \cdot \text{Fläche}(g)$



Additivität: Teilintervalle ergänzen sich



Monotonie: $f \geq 0 \Rightarrow \text{Integral} \geq 0$

Abb. 4: Geometrische Deutung der drei Rechenregeln

5. Überblick der Verfahren

Zur Berechnung von Integralen stehen im Folgenden vier Verfahren im Vordergrund:

- **Substitution:** Umkehrung der Kettenregel
- **Partielle Integration:** Umkehrung der Produktregel
- **Partialbruchzerlegung:** für gebrochen rationale Funktionen
- **Riemann-Summe:** numerische Annäherung des Integrals

Die Übungsaufgaben 6.1 bis 6.4 wenden diese Methoden auf konkrete Beispiele an.

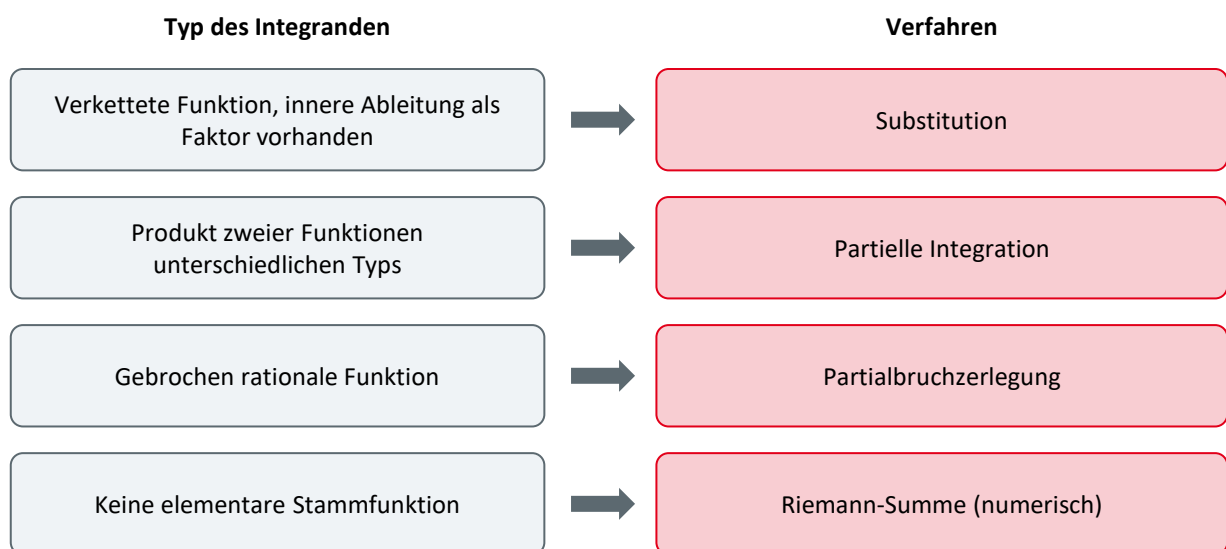


Abb. 5.: Wahl des Integrationsverfahrens nach Typ des Integranden

6. Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1 · Substitution

Berechnen Sie das folgende Integral.

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

Aufgabe 6.2 · Partielle Integration

Berechnen Sie das folgende Integral.

$$\int (1 + 2x) \cdot e^{-x} dx$$

Aufgabe 6.3 · Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie das folgende Integral.

$$\int \frac{8x^2 - 2x - 43}{(x - 5)(x + 2)^2} dx$$

Aufgabe 6.4 · Riemann-Summe

Nähern Sie das Integral über die angegebene Funktion durch eine Riemann-Summe mit n Teilintervallen an.

$$f(x) = \sin(x) \text{ auf } [0, \pi], \quad n = 4$$

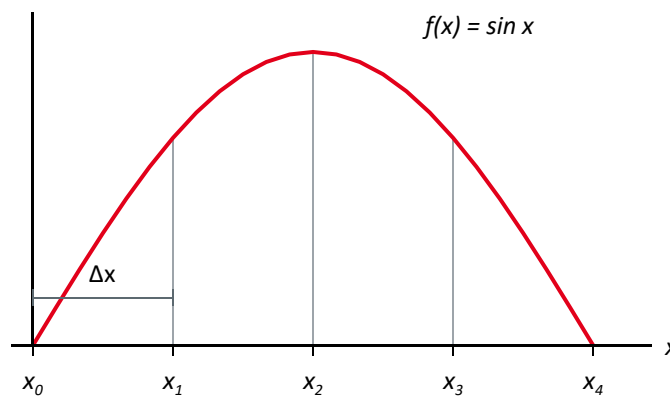


Abb. 6: Arbeitsskizze zu Aufgabe 6.4, Teilintervalle mit $x_0 = 0$ und $x_4 = \pi$

7. Übergang zum Doppelintegral

In einer Dimension beschreibt das Integral $\int f(x) dx$ die Summe von Streifenflächen. Das Ergebnis ist die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$. In zwei Dimensionen wird daraus eine Doppelsumme von Kästchenflächen:

$$\iint f(x, y) dA \approx \sum \sum f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x \Delta y$$

Was in 1D ein Streifen ist, wird in 2D ein Flächenstück. Das Ergebnis ist das Volumen unter der Fläche $z = f(x, y)$ über dem Grundbereich in der xy -Ebene.

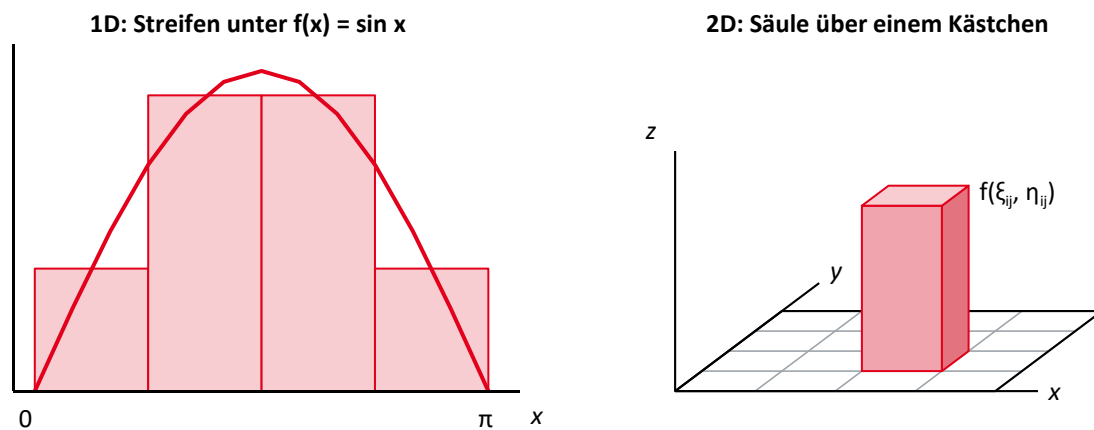


Abb. 7: Streifen der Breite Δx in 1D (links), Säule über dem Kästchen $\Delta x \cdot \Delta y$ in 2D (rechts)