

Karsten Keßler

Grundlagen der Integralrechnung: Lösungen

Stand: 22.09.2026

Übungsaufgaben 6.1 bis 6.4: Lösungen

- 6.1 Substitution
- 6.2 Partielle Integration
- 6.3 Partialbruchzerlegung
- 6.4 Riemann-Summe

Vollständige Rechenwege zu Substitution, partieller Integration, Partialbruchzerlegung und Riemann-Summe

Aufgabe: Berechnen Sie das Integral von $x/(1+x^2)^2 dx$ in den Grenzen 0 bis 1.

Der Integrand enthält die innere Funktion $1+x^2$ und deren Ableitung $2x$ bis auf den Faktor 2 als Zähler. Damit bietet sich die Substitution an:

$$u = 1 + x^2 \Rightarrow du/dx = 2x \Rightarrow x dx = du/2$$

Da es sich um ein bestimmtes Integral handelt, werden die Grenzen mitsubstituiert: aus $x = 0$ wird $u = 1$, aus $x = 1$ wird $u = 2$.

$$\int_0^1 x/(1+x^2)^2 dx = (1/2) \int_1^2 u^{-2} du$$

Die Stammfunktion von u^{-2} ist $-u^{-1}$. Einsetzen der substituierten Grenzen ergibt:

$$(1/2) \int_1^2 u^{-2} du = (1/2) [-1/u]_1^2 = (1/2) (-1/2 + 1) = 1/4$$

Die Substitution erspart das Rücksubstituieren, weil die Grenzen bereits in u ausgedrückt sind; der Wert ist positiv, wie es der positive Integrand auf $[0, 1]$ verlangt.

Ergebnis: Das Integral hat den Wert $1/4 = 0,25$.

Aufgabe: Berechnen Sie das Integral von $(1 + 2x) e^{-x} dx$.

Der Integrand ist ein Produkt aus einem Polynom und einer Exponentialfunktion. Das Polynom wird abgeleitet, die Exponentialfunktion integriert:

$$u = 1 + 2x, \quad u' = 2, \quad v' = e^{-x}, \quad v = -e^{-x}$$

Mit der Regel $\int u v' dx = u v - \int u' v dx$ folgt:

$$\int (1 + 2x) e^{-x} dx = -(1 + 2x) e^{-x} + \int 2 e^{-x} dx$$

Das verbleibende Integral ist elementar: $\int 2 e^{-x} dx = -2 e^{-x}$. Zusammenfassen der beiden Terme liefert:

$$\int (1 + 2x) e^{-x} dx = -(1 + 2x) e^{-x} - 2 e^{-x} + C = -(3 + 2x) e^{-x} + C$$

Probe durch Ableiten des Ergebnisses:

$$d/dx [-(3 + 2x) e^{-x}] = -2 e^{-x} + (3 + 2x) e^{-x} = (1 + 2x) e^{-x}$$

Die Ableitung stimmt mit dem Integranden überein; die Stammfunktion ist damit bestätigt.

Ergebnis: $F(x) = -(3 + 2x) e^{-x} + C$.

Aufgabe: Berechnen Sie das Integral von $(8x^2 - 2x - 43)/((x - 5)(x + 2)^2) dx$.

Der Nenner ist bereits faktorisiert; $x = -2$ ist eine doppelte Nullstelle. Der Ansatz enthält deshalb beide Potenzen von $(x + 2)$:

$$(8x^2 - 2x - 43)/((x - 5)(x + 2)^2) = A/(x - 5) + B/(x + 2) + C/(x + 2)^2$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt die Identität:

$$8x^2 - 2x - 43 = A(x + 2)^2 + B(x - 5)(x + 2) + C(x - 5)$$

Einsetzen der Nullstellen bestimmt zwei Koeffizienten unmittelbar:

$$x = 5: 147 = 49A \Rightarrow A = 3 \quad x = -2: -7 = -7C \Rightarrow C = 1$$

Der Koeffizientenvergleich bei x^2 liefert $A + B = 8$, also $B = 5$. Die Kontrolle des konstanten Glieds bestätigt dies: $4A - 10B - 5C = 12 - 50 - 5 = -43$. Damit ist das Integral in drei einfache Summanden zerlegt:

$$\int [3/(x - 5) + 5/(x + 2) + 1/(x + 2)^2] dx$$

Die ersten beiden Summanden führen auf Logarithmen, der dritte auf eine Potenz:

$$= 3 \ln|x - 5| + 5 \ln|x + 2| - 1/(x + 2) + C$$

Ergebnis: $F(x) = 3 \ln|x - 5| + 5 \ln|x + 2| - 1/(x + 2) + C$.

Aufgabe: Nähern Sie das Integral von $\sin x$ über $[0, \pi]$ durch eine Riemann-Summe mit $n = 4$ Teilintervallen an.

Bei $n = 4$ Teilintervallen ergibt sich die Schrittweite $\Delta x = (\pi - 0)/4 = \pi/4 \approx 0,7854$ mit den Teilpunkten $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/2, x_3 = 3\pi/4, x_4 = \pi$.

$$\Delta x = \pi/4, \quad f(x_k) = \sin x_k: \quad 0; 0,7071; 1; 0,7071; 0$$

Die Linkssumme verwendet die Funktionswerte an den linken Intervallrändern:

$$S_l = \Delta x \cdot (0 + 0,7071 + 1 + 0,7071) = 0,7854 \cdot 2,4142 \approx 1,896$$

Da $f(x_0) = f(x_4) = 0$ ist, stimmt die Rechtssumme mit der Linkssumme überein; beide unterschätzen die Fläche. Die Mittelpunkregel nutzt die Intervallmitten $\pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8, 7\pi/8$:

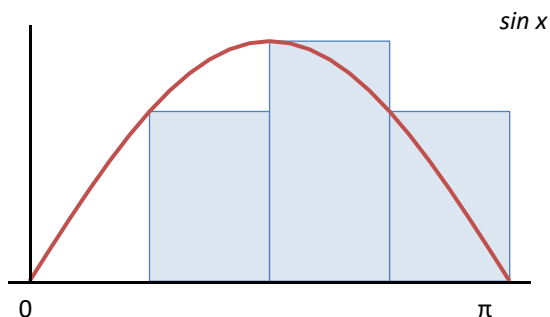
$$S_m = \Delta x \cdot (0,3827 + 0,9239 + 0,9239 + 0,3827) = 0,7854 \cdot 2,6131 \approx 2,052$$

Der exakte Wert des Integrals beträgt:

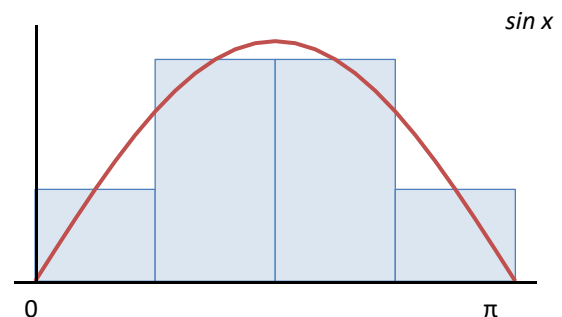
$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2$$

Die Randsummen weichen um $-0,104$ ab, das sind $5,2\%$; die Mittelpunkregel weicht nur um $+0,052$ ab, also $2,6\%$. Sie ist bei gleichem Rechenaufwand deutlich genauer.

Ergebnis: $S_l = S_r \approx 1,896$ und $S_m \approx 2,052$ bei exaktem Wert 2.



Linkssumme: $S_l = \Delta x \cdot \sum f(x_i) \approx 1,896$



Mittelpunktregel: $S_m \approx 2,052$

Abb.: Riemann-Summen zu Aufgabe 6.4 mit vier Teilintervallen auf $[0, \pi]$